数理解析研究所講究録
964巻 1996年 72-105

群の作用する可換環の上の加群

名古屋大学医療技術短期大学部　橋本 光靖 (Mitsuyasu Hashimoto)

1 序

可換環論において, Auslander-Buchweiz による Cohen-Macaulay local ring の上の Cohen-Macaulay approximation の理論 [4] は可換環論の新しい進展に寄与している [42]。一方, 彼らの approximation の理論はかなり一般の abelian category の理論の形で展開されており [4], [5], 間もなく C. Ringel によって, 多元環の表現論における quasi-hereditary algebra の Δ-good approximation という, 別の面白い実例として実現された [35]。Ringel の理論から, 直ちに reductive 群の有限次元表現の approximation が Schur algebra を介して導かれる。元々, quasi-hereditary algebra は, reductive 群の表現を調べる過程で Cline, Parshall, Scott らによって得られた概念であり [9], [36], S. Donkin は Ringel の approximation から得られる reductive 群の tilting module を調べる [15] など, こちらの話題も進展を見せているようだ。

これら2つの理論は別のものでありながら, categorical な雰囲気が当然ながら似ている。両者を reductive 群の作用する Cohen-Macaulay algebra の上で統一的に論じることがここでの目的である。

k が体で, G が k 上のアフィン代数群で, A は k 上の可換代数で, G は A に環準同型で rational に act しているものとする。M が (G,A)-module (G-equivariant A-module) であるとは, M が A-module であり, rational G-module であり, A 作用 $A\otimes M\to M$ が G-homomorphism であることをいう。(G,A)-homomorphism とは, 単に G-homomorphism であって A-linear でもあるものをいう。これによって, with enough injectives な abelian category ${}_{G,A}\mathbb{M}$ が得られる。A-module として有限生成であるような (G,A)-modules の全体がなす${}_{G,A}\mathbb{M}$ の full subcategory を ${}_{G,A}\mathbb{M}_f$ で表す。

G が reductive で, A が Cohen-Macaulay k-algebra の時に, ${}_{G,A}\mathbb{M}_f$ の上で, 2つの approximation を統一して実現したい。但し, ここでは A は positively graded で, 考える (G,A)-module M は全て A-graded で, M の各斉次成分は G-submodule になっているもののみを考える。このような状況設定は G を少し取り替えることで実現できる (6節参照)。さらに, 若干の仮定が必要になる (定理 9.5) が, $G=GL(1,k)$ の時には単に Cohen-Macaulay approximation の graded version になり, また, $A=k$ の時には Ringel の Δ-good approximation になるくらいには弱い仮定である。また, G と A の間の関係に何がしかの良い仮定をおくことは自然に思われる。

さて, (G,A)-module は Hopf 代数の理論では, G の座標環を H とする時, (H,A)-Hopf module (relative Hopf module) と呼ばれるものになっており, H や A の可換性も必ずしも仮定しない形で Hopf Galois 理論などで良く使われるそうである [10], [33].

可換環論の世界でも (G, A)-module が環論的な取り扱いで調べられている実例がある。G が k-split torus $\mathbb{G}_m^n = GL(1, k)^n$ の場合がそうで, G が A に rational に act しているとは, A が $\mathbb{Z}^n$-graded k-algebra であることに他ならず, (G, A)-module とは, $\mathbb{Z}^n$-graded A-module である (例 5.1)。この状況で, A が noetherian とした時の (G, A)-module の (co-)homological な取り扱いの基礎づけが [18] ($\mathbb{Z}$-graded), [19] ($\mathbb{Z}^n$-graded) でなされている。$\mathbb{Z}$-graded algebra の homological な取り扱いがそれ自体面白く, 射影幾何や組合せ論で強力な武器となっており, $\mathbb{Z}^n$-graded algebra も組合せ論をはじめとした応用を持つことはこの講究録の他の頁や [22] を参照して下さい。また, 本論でのテーマである Cohen-Macaulay 環上の Cohen-Macaulay 加群の理論の graded version も良く調べられている (例えば [41, Chap. 15])。

一方, 以上の枠組からはそれるが, 一般論の展開抜きに, 散発的に (G, A)-module が homological な取り扱いを受けている面白い例もある。A. Lascoux は 10 節で述べる determinantal ring $A = S/I_t$ の S-module としての minimal free resolution を標数 0 の仮定の下で, 表現論的考察から予想し, resolution の各項を (G, S)-module として決定した [30]。特に, それまで環論的考察のみでは不可能であった A の Betti 数 $\dim_k \operatorname{Tor}_i^S(k, A)$ を, $\operatorname{Tor}_i^S(k, A)$ の表現としての既約分解まで決定することによって決定した。Lascoux 以降, 一般標数で determinantal ring の syzygies を表現論的な取り扱いで調べる動きが活発化し ([21] を参照), 現在も続いている。

そこで, G と A とその関係が良い時に, (G, A)-module を A の可換環論に重きをおいて取り扱う一般論がある程度可能なのではないかと思われる。

ここでは, G も A も一般として, M と N が (G, A)-module の時に, $\operatorname{Tor}_i^A(M, N)$, $\operatorname{Ext}_A^i(M, N)$ に G-action を定義して, (G, A)-module の構造を入れる。I が A の G-ideal の時, local cohomology $H_I^i(M)$ にも (G, A)-module の構造を入れる。但し, $A = k$ の場合を考えても分かるように, A が noetherian で, M が A-finite でないと, $\operatorname{Ext}_A^i(M, N)$ は rational とは限らなくなる。後で, rational とは限らない dualizing complex の cohomology として, rational な canonical module を取り扱うなど, 一旦 rational な G-module の枠からはみ出して (G, A)-module を扱うことは避けられない。G-ideal adic な completion も, rational な枠組では論じられないようだ。そこで, G-module を G の座標環 H の dual Hopf algebra H° 上の加群とみなし, (G, A)-module は smash product $A\#H^\circ$ の上の加群と見る Hopf 代数的な取り扱いが必要となる。本論の前半はこれらの対象の (co-)homological な一般論に充てられる。

本論は可換環論以外からの準備は頁を割いて行なう。2 節では, Hopf 代数からの基本的な準備を行なう。Hopf algebra の module, comodule の Hom と $\otimes$, dual Hopf algebra と rational module, (co-)module algebra, smash product, relative Hopf module などである。3 節は 2 節の続きで, smash product の上の module の圏の (co-)homological な取り扱いの準備である。4 節では, 余可換な Hopf 代数 U と U-module commutative algebra A に対して, Tor^A と Ext_A に $A\#U$-module の構造を入れる。はじめに rational な枠からはみ出して定義して, 後から $U = H^\circ$ の場合を考え, rationality を論じるわけである。5 節では,

3,4 節の準備の下, (G, A)-module の homological な取り扱いを rationality を問題にしながら論じる。6 節では, A が graded (というより, ${}_{G,A}\mathbb{M}$ が graded という方が妥当かも知れない) な時を考える。次数付可換環を環論的に扱う時の必須アイテムである residue field の injective hull $E_A(k)$, dualizing complex, canonical module の (G, A)-module としての (もしくは ${}_{A\#H^\circ}\mathbb{M}$ の derived category の object としての) 1 次元表現のテンサーを modulo とした一意性を論じる。また, DPF filtration (補題 6.4), Krull-Schmidt の定理 (補題 6.2) など, 後で必要な道具だても用意する。7,8 節は再び準備であり, 新しい結果はない。7 節では, Auslander-Buchweiz の理論の紹介である。彼らの一般論はかなり豊富な世界を持っているが, その一般論の成立する状況を AB-context と名付けた (定理 7.4 とその直後)。Cohen-Macaulay approximation も, Δ-good approximation もともに AB-context の枠組に入っている。8 節では, reductive 群の good module (module with good filtrations) についてのまとめをする。9 節では, S が good で positively graded な多項式環で, I が S の perfect ideal で, A 及び A の canonical module K_A が good な時を考え, $\mathrm{Hom}_A(M, K_A)$ が good である (M が check-good という) maximal Cohen-Macaulay module M の全体 $\mathcal{X}$ と, $\mathrm{Hom}_A(K_A, N)$ が good である (N が tilt-good であるという) finite A-module of finite injective dimension N の全体 $\mathcal{Y}$ について $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ が AB-context であるという主定理 (定理 9.5) を述べ, その証明を行なう。10 節では, 先に触れた determinantal ring の例が, 定理 9.5 の non-trivial な実例になっていることを述べる。一番の問題は K_A が good であることだが, 証明はまたの機会に譲る。系 9.20 により, determinantal ring $A = S/I_t$ は, projective dimension と同じ長さの good free resolution, check-good free resolution 及び ω-resolution を持つことが分かる。Eagon-Northcott complex ($m = t$ の時の A の minimal free resolution) [16] は check-good な (G, S)-resolution として具体的に再構成されている [8] が, 一般の場合, どのように具体的に構成できるのかはまだ分からないし, この問題で良く考えられる一般の base ring 上 (または $\mathbb{Z}$ 上) の問題については, 全く分かっていない状況である。

また, determinantal ring 以外に定理 9.5 の成立する non-trivial な例がどれだけあるかも良く分からない (注意 9.22 参照)。

この仕事をするにあたり, 有益な方向づけを与えて下さった渡辺敬一先生に感謝致します。この原稿の準備段階での誤りを指摘して下さり, 有益な情報を与えて下さった竹内光弘先生にこの場を借りてお礼を申し上げます。

2 Hopf 代数からの準備

この節では, Hopf 代数からの基本事項を準備をする。説明のない用語, 記法については [40] を参照。この節の内容にはほとんど証明はつけない。[40], [1], [26] などを参照。

環 A に対して, A-module は, 特に断りがなければ left A-module を意味し, ${}_A\mathbb{M}$ で, A-modules が A-linear maps でなす abelian category を表す。k は体を表す。k-coalgebra C に対して, C-comodule は, 特に断りがなければ, right C-comodule を意味し, $\mathbb{M}^C$ で, C-comodules が C-comodule map でなす abelian category を表す。$\mathbb{M}^C$ は enough injectives

で inductive limits を持つ。

$\otimes$ と Hom　U は k-Hopf algebra とする。U の積, 単位射, 余積, 余単位射, antipode をそれぞれ, m_U, u_U, Δ_U, ε_U, S_U で表す (下つきの U は場合によっては省く)。
$V, W \in {}_U\mathbb{M}$ に対して, $V \otimes W$ (本論を通して $\otimes_k$ を $\otimes$ で単に表す) は

$$u(v \otimes w) = \sum_{(u)} u_{(1)} v \otimes u_{(2)} w \quad (u \in U,\ v \in V,\ w \in W)$$

で, $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ は

$$(uf)(v) = \sum_{(u)} u_{(1)}(f((Su_{(2)})(v))) \quad (u \in U,\ f \in \mathrm{Hom}_k(V, W),\ v \in V)$$

でそれぞれ U-module となる ($S = S_U$ は U の antipode)。
V が U-module の時, $U \otimes V$ は U-free である。
Standard な k-linear maps

(2.1) $\circ : \mathrm{Hom}_k(V, W) \otimes \mathrm{Hom}_k(X, V) \to \mathrm{Hom}_k(X, W) \qquad f \otimes g \mapsto f \circ g$

(2.2) $\Psi : \mathrm{Hom}_k(V \otimes X, W) \cong \mathrm{Hom}_k(V, \mathrm{Hom}_k(X, W)) \quad f \mapsto (v \mapsto (x \mapsto f(v \otimes x)))$

(2.3) $V \otimes k \cong V \cong k \otimes V \qquad (v \otimes 1 \mapsto v \mapsto 1 \otimes v)$

(2.4) $(V \otimes W) \otimes X \cong V \otimes (W \otimes X) \quad (v \otimes w) \otimes x \mapsto v \otimes (w \otimes x)$

(2.5) $X \otimes \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(V, X \otimes W) \qquad x \otimes f \mapsto (v \mapsto x \otimes fv)$

は全て U-linear で V, W, X について natural である。ここに V, W, X は U-modules で k は trivial 表現を表す。つまり, k は k-vector space k に $u\alpha = \varepsilon_U(u)\alpha$ ($u \in U$, $\alpha \in k$) によって U が作用する U-module である。最後の写像は V が有限次元なら同型であり, 特に $W = k$ の時を考えると, $X \otimes V^* \cong \mathrm{Hom}(V, X)$ である。U が cocommutative ならば, $\tau : V \otimes W \cong W \otimes V$ ($\tau(v \otimes w) = w \otimes v$) も U-linear で V, W について natural である。
関手 $\mathrm{Ext}^i_U(k, ?)$ を $H^i(U, ?)$ で表すことにする。V, W が U-modules の時,

$$\mathrm{Hom}_U(V, W) \cong \mathrm{Hom}_U(k, \mathrm{Hom}_k(V, W)) = H^0(U, \mathrm{Hom}_k(V, W))$$

である。従って, (2.2) の両辺の $H^0(U, ?)$ をとって,

(2.6) $$\mathrm{Hom}_U(V \otimes X, W) \cong \mathrm{Hom}_U(V, \mathrm{Hom}_k(X, W))$$

を得る。従って, $? \otimes X$ は $\mathrm{Hom}_k(X, ?)$ の left adjoint である。(2.6) で $V = \mathrm{Hom}_k(X, W)$ の場合を考え, 右辺の id_V に対応する左辺の元を考えると,

$$\mathrm{ev} : \mathrm{Hom}_k(X, W) \otimes X \to W \qquad (f \otimes x \mapsto fx)$$

であるから, ev は U-linear である。

さらに, U が cocommutative な時には, U-linear map $\mathrm{ev}\circ\tau$ に

$$\mathrm{Hom}_U(X\otimes \mathrm{Hom}_k(X,W),W)\cong \mathrm{Hom}_U(X,\mathrm{Hom}_k(\mathrm{Hom}_k(X,W),W))$$

で対応する map $x\mapsto (f\mapsto fx)$ は U-linear である (この種の map を以後 duality map と称する)。

M, N が U-comodules の時, $M\otimes N$ は coaction

$$M\otimes N\to M\otimes N\otimes U \qquad (m\otimes n\mapsto \sum_{(m),(n)} m_{(0)}\otimes n_{(0)}\otimes m_{(1)}n_{(1)})$$

で U-comodule である。

また, M が k 上有限次元の時には $M^* = \mathrm{Hom}_k(M,k)$ も次のようにして U-comodule となる。M の基底 $x_1,\dots,x_m$ をとり, その双対基底を $\xi_1,\dots,\xi_m$ とする。M の coaction $M\to M\otimes U$ を ω_M で表し, $\omega_M(x_j)=\sum_i x_i\otimes u_{ij}$ によって, $u_{ij}\in U$ を定める。この時, $\omega_{M^*}: M^*\to M^*\otimes U$ を$\omega_{M^*}(\xi_i)=\sum_j \xi_j\otimes S_U(u_{ij})$ で定めることにより, M^* が U-comodule となる。

Trivial な U-comodule (k で表す) とは, k に, $\omega(\alpha)=\alpha\otimes 1$ ($\alpha\in k$) で定まる coation を入れた U-comodule を表す。$\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{M}^U}(k,?)$ を $H^i(\mathbb{M}^U,?)$ で表す。

Dual Hopf algebra U は k-coalgebra であるから, U^* は積

$$(u^*v^*)(w)=\sum_{(w)} u^*w_{(1)}\cdot v^*w_{(2)} \qquad (u^*,v^*\in U^*,\ w\in U)$$

によって k-algebra である。

$$U^\circ=\{\varphi\in U^*\,|\,\exists I\subset U\ (\text{ideal}),\ \ \varphi(I)=0,\ \dim_k U/I<\infty\}$$

とおく。U° は U^* の k-subalgebra であり, $m_U^*: U^*\to (U\otimes U)^*$ によって, $U^\circ\subset U^*$ は $U^\circ\otimes U^\circ\subset (U\otimes U)^*$ に写されて, m_U^* を余積として k-Hopf algebra になることが確かめられる。U° を U の双対 Hopf algebra と呼ぶ。

M が U-comodule の時, U^* の M への作用を

$$u^*m:=\sum_{(m)}(u^*m_{(1)})m_{(0)}$$

で定めることにより, M は U^*-module となる。U-comodule map は U^*-linear であり, 関手 $\mathbb{M}^U\to {}_{U^*}\mathbb{M}$ を得る。合成 $\mathbb{M}^U\to {}_{U^*}\mathbb{M}\to {}_{U^\circ}\mathbb{M}$ を Φ で表すことにする。明らかに Φ は完全関手である。

Φ はテンサー積も保つ。つまり, $M,N\in\mathbb{M}^U$ に対して, $\Phi M\otimes\Phi N\cong M\otimes N\cong\Phi(M\otimes N)$ は, U-isomorphism である。有限次元表現の dual も保つ。つまり, $M\in\mathbb{M}^U$, $\dim_k M<\infty$ に対して, $(\Phi M)^*\cong M^*\cong\Phi(M^*)$ は U-isomorphism である。

さらに, Φ は trivial 表現を保つ。$\Phi(k)$ は trivial 表現 k である。

k-Hopf algebra U が proper であるとは, U° が U^* で dense (つまり, 自然な射$\eta: U\to (U^\circ)^*$ ($\eta(u)(v^*)=v^*(u)$) が単射) なことをいう。

補題 2.7 U が k-algebra として可換で有限生成ならば, U は proper である。

証明 $u \in \operatorname{Ker}\eta$ とせよ。任意の U の極大イデアル $\mathfrak{m}$ と $n \geq 1$ について, $U/\mathfrak{m}^n$ は k 上有限次元だから, u は $U/\mathfrak{m}^n = (U/\mathfrak{m}^n)^{**}$ において 0 である。このことから, $\mathfrak{m} \notin \operatorname{supp} Uu$ であり, $\mathfrak{m}$ は任意ゆえ, $Uu = 0$ である。 □

U は dense な k-Hopf algebra とする。V は U°-module とし, 作用 $U^\circ \otimes V \to V$ を a_V で表す。自然な同型

$$\operatorname{Hom}_k(U \otimes V, V) \cong \operatorname{Hom}_k(V, \operatorname{Hom}_k(U, V))$$

を ρ_V で表す。自然な埋入の合成 $V \otimes U \hookrightarrow V \otimes (U^\circ)^* \hookrightarrow \operatorname{Hom}_k(U, V)$ を θ_V で表す。この時, $\rho_V a_V : V \to \operatorname{Hom}_k(U, V)$ による $\operatorname{Im}(\theta_V)$ の引き戻し $(\rho_V a_V)^{-1}(\operatorname{Im}(\theta_V))$ を V_{rat} で表し, V の rational part と呼ぶ。V_{rat} は V の subspace である。明らかに, $(\rho_V a_V)(V_{\mathrm{rat}}) \subset \operatorname{Im}(\theta V) = V \otimes U$ だが, 実は $(\rho_V a_V)(V_{\mathrm{rat}}) \subset V_{\mathrm{rat}} \otimes U$ となっており, $\rho_V a_V$ を余作用として, V_{rat} は U-comodule である。V_{rat} は V の U-submodule であり, $f : V \to W$ が U-module map の時, $f(V_{\mathrm{rat}}) \subset W_{\mathrm{rat}}$ である。よって, $(?)_{\mathrm{rat}}$ は ${}_{U^\circ}\mathbb{M}$ から $\mathbb{M}^U$ への加法的関手である。

V が U°-module で $V_{\mathrm{rat}} = V$ の時, V は rational であるという。M が U-comodule の時, $M = \Phi M$ は rational である。$\mathrm{id}_M : M \cong M = (\Phi M)_{\mathrm{rat}}$ を unit とし, $\Phi(V_{\mathrm{rat}}) = V_{\mathrm{rat}} \hookrightarrow V$ を counit として $(?)_{\mathrm{rat}}$ は Φ の right adjoint である。Φ が exact で, unit $\mathrm{Id} \to (?)_{\mathrm{rat}} \circ \Phi$ が同型なので, Φ は忠実充満完全である。また, $(?)_{\mathrm{rat}}$ は左完全で injectives を保つことも分かる。

以後, proper な k-Hopf algebra U に対し, U-comodule M と rational U°-module $M = \Phi M$ とを区別しない。Rational U°-module(s) の submodule, factor module, tensor product, inductive limit は rational である。V が rational で有限次元, W が rational なら, $\operatorname{Hom}_k(V, W) \cong W \otimes V^*$ も rational である。Trivial 表現 k は rational である。

Module algebra と Comodule algebra ここからの参考文献は [33] である。

U は k-Hopf algebra とする。A が U-module k-algebra であるとは, A が k-algebra で, U-module でもあり, 積 $m_A : A \otimes A \to A$ が U-linear であることをいう。この時, 単位射 $u_A : k \to A$ も U-linear である。A, B が U-module k-algebras の時, $\varphi : A \to B$ が U-module k-algebra map であるとは, φ が U-linear であって, k-algebra map でもあることをいう。

A は U-module algebra とする。M が (U, A)-module であるとは, M が U-module で A-module でもあり, 作用 $A \otimes M \to M$ が U-linear であることをいう。M, N が (U, A)-modules の時, $f : M \to N$ が (U, A)-linear であるとは, f が U-linear かつ A-linear であることをいう。(U, A)-modules が (U, A)-linear maps でなす圏を ${}_{U,A}\mathbb{M}$ で表そう。k は trivial 表現と見て U-module algebra である。

スマッシュ積 $A\#U$ は次のように定義される。$A\#U$ は k-vector space $A \otimes U$ に積を

$$(a \otimes u)(b \otimes v) = \sum_{(u)} a(u_{(1)}b) \otimes u_{(2)}v \qquad (a, b \in A,\ \ u, v \in U)$$

で入れた k-algebra である。$A \to A\#U$ $(a \mapsto a \otimes 1)$, $U \to A\#U$ $(u \mapsto 1 \otimes u)$ はともに k-algebra map である。よって, $A\#U$-module は U-module でも A-module でもあるが, 容易に分かるように, (U, A)-module にもなっている。こうして関手 ${}_{A\#U}\mathbb{M} \to {}_{U,A}\mathbb{M}$ が得られるが, 逆に, M が (U, A)-module なら, $(a \otimes u)(m) = a(um)$ と定義することにより, M は $A\#U$-module になることが確かめられる。この対応は互いに逆になっており, ${}_{A\#U}\mathbb{M}$ と ${}_{U,A}\mathbb{M}$ は同値である。よって, 以後, $A\#U$-module と (U, A)-module の区別はしない。$k\#U \cong U$ だから, ${}_{U,k}\mathbb{M} \cong {}_{U}\mathbb{M}$ である。

$H^0(U, A)$ は A の k-subalgebra であり, $H^0(U, ?)$ は ${}_{U,A}\mathbb{M}$ から ${}_{H^0(U,A)}\mathbb{M}$ への左完全関手である。

B が U-comodule k-algebra であるとは, B が k-algebra で, U-comodule で, 積 $m_B : B \otimes B \to B$ が U-comodule map であることをいう。U-comodule k-algebra map は U-comodule map であるような k-algebra map のことをいう。M が (U, B)-Hopf module とは, M が U-comodule で, B-module で, 作用 $B \otimes M \to M$ が U-comodule map であることをいう。U-comodule map かつ B-module map である map を射として, abel 圏 ${}_B\mathbb{M}^U$ が得られる。この圏は, inductive limit を持つ。k は trivial 表現と見て U-comodule algebra であり, ${}_k\mathbb{M}^U = \mathbb{M}^U$ である。

$B^U = H^0(\mathbb{M}^U, B)$ は B の k-subalgebra であり, $H^0(\mathbb{M}^U, ?)$ は ${}_A\mathbb{M}^U$ から ${}_{B^U}\mathbb{M}$ への左完全関手である。

B が U-comodule algebra ならば, $\Phi B = B$ は U°-module algebra である。M が (U, B)-Hopf module なら, 自然に M は (U°, B)-module である。これにより, 完全関手 $\Phi : {}_B\mathbb{M}^U \to {}_{U^\circ,B}\mathbb{M}$ が得られる。

U が proper で, A が U°-module algebra ならば, A_{rat} は A の k-subalgebra であり, A は U-comodule algebra である。M が (U°, A)-module なら, M_{rat} は (U, A_{rat})-Hopf module であり, 関手 $(?)_{\mathrm{rat}} : {}_{U^\circ,A}\mathbb{M} \to {}_{A_{\mathrm{rat}}}\mathbb{M}^U$ が得られる。

U が proper で, B が U-comodule algebra の時 (したがって, $B = B_{\mathrm{rat}}$), $(?)_{\mathrm{rat}} : {}_{U^\circ,B}\mathbb{M} \to {}_B\mathbb{M}^U$ は Φ の right adjoint であり, Φ は忠実充満完全, $(?)_{\mathrm{rat}}$ は injective object を保つ left exact functor である。

補題 2.8 U が proper で, B は U-comodule algebra とする時, ${}_B\mathbb{M}^U$ は enough injectives を持つ。

証明 $M \in {}_B\mathbb{M}^U$ とする。${}_{U^\circ,B}\mathbb{M} \cong {}_{B\#U^\circ}\mathbb{M}$ は enough injectives なので, $\Phi M \hookrightarrow I$, I は ${}_{U^\circ,B}\mathbb{M}$ の injective object と出来る。$(?)_{\mathrm{rat}}$ は単射と injective object を保つので, $M \cong (\Phi M)_{\mathrm{rat}} \hookrightarrow I_{\mathrm{rat}}$ が M から injective object への単射を与える。 □

3 Cocommutative Hopf algebra の commutative algebra への作用

U は cocommutative Hopf algebra, A は commutative U-module k-algebra とする。

$\otimes_A$ と Hom_A　M が $A\#U$-module, N が U-module の時, $M \otimes N$ は

$$(a \otimes u)(m \otimes n) = \sum_{(u)} a(u_{(1)}m) \otimes u_{(2)}n \quad (a \in A,\, u \in U,\, m \in M,\, n \in N)$$

により $A\#U$-module である。M が U-module, N が $A\#U$-module なら, 今度は A を N の方に作用させて, やはり $A\#U$-module $M \otimes N$ が得られる。M も N も $A\#U$-module の時は, $M \otimes N$ が $A\#U$-module となる見方は 2 通り出来てしまうが, 断らなければ, A が M の方に作用している方を優先することにしよう。

M, N が $A\#U$-modules の時,

$$d : M \otimes (A \otimes N) \to M \otimes N$$

を $d(m \otimes a \otimes n) = am \otimes n - m \otimes an$ で定めると $A\#U$-homomorphism であり, $M \otimes_A N = \mathrm{Coker}\, d$ も $A\#U$-module structure を持つ。

M が $A\#U$-module, N が U-module の時, $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ は自然に $A\#U$-module である (U 作用は **1.4** の通り, A 作用は M への作用)。M が U-module で N が $A\#U$-module の時には, A 作用を N への作用として, やはり $A\#U$-module となる。M も N も $A\#U$-module の時, $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ を $A\#U$-module と見る見方は 2 通りになるが, A が N に作用している方を優先することにしよう。

M, N が $A\#U$-modules の時, $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ は $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ の $A\#U$-submodule である。

$$\mathrm{Hom}_{A\#U}(M, N) = \mathrm{Hom}_A(M, N) \cap \mathrm{Hom}_U(M, N) = H^0(U, \mathrm{Hom}_A(M, N))$$

であることに注意しよう。

$\varphi : A \to B$ が U-module algebra map とする (A, B とも commutative と仮定)。

$$\varphi\#U : A\#U = A \otimes U \to B \otimes U = B\#U$$

は単に $\varphi \otimes \mathrm{id}_U$ として定義され, k-algebra map となる。よって $B\#U$-module は $A\#U$-module である。

M が $B\#U$-module, V が $A\#U$-module の時, $M \otimes_A V$, $V \otimes_A M$, $\mathrm{Hom}_A(M, V)$ 及び $\mathrm{Hom}_A(V, M)$ は自然に $B\#U$-module となり, 単に $A\#U$-module としては, 上に定義されているものとなる。

M, N が $B\#U$-modules, V, W が $A\#U$-modules の時, standard な maps

(3.1) $$M \to \mathrm{Hom}_A(A, M) \quad (m \mapsto (a \mapsto am))$$

(3.2) $$\circ : \mathrm{Hom}_A(V, W) \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M, V) \to \mathrm{Hom}_A(M, W)$$

(3.3) $$\circ : \mathrm{Hom}_A(W, M) \otimes_A \mathrm{Hom}_A(V, W) \to \mathrm{Hom}_A(V, M)$$

(3.4) $$\Psi : \mathrm{Hom}_A(V \otimes_A W, M) \cong \mathrm{Hom}_A(V, \mathrm{Hom}_A(W, M))$$

(3.5) $$\Psi : \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A V, W) \cong \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(V, W))$$

(3.6) $$\Psi : \mathrm{Hom}_A(V \otimes_A M, W) \cong \mathrm{Hom}_A(V, \mathrm{Hom}_A(M, W))$$

$$(3.7) \qquad \Psi : \mathrm{Hom}_B(V \otimes_A M, N) \cong \mathrm{Hom}_A(V, \mathrm{Hom}_B(M, N))$$
$$(3.8) \qquad \Psi : \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A V, N) \cong \mathrm{Hom}_B(M, \mathrm{Hom}_A(V, N))$$
$$(3.9) \qquad \Psi : \mathrm{Hom}_A(M \otimes_B N, V) \cong \mathrm{Hom}_B(M, \mathrm{Hom}_A(N, V))$$
$$(3.10) \qquad M \otimes_A A \cong M \cong A \otimes_A M$$
$$(3.11) \qquad (M \otimes_A V) \otimes_A W \cong M \otimes_A (V \otimes_A W)$$
$$(3.12) \qquad \tau : M \otimes_A V \cong V \otimes_A M$$
$$(3.13) \qquad M \to \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(M, V), V) \quad \text{(duality map)}$$
$$(3.14) \qquad M \otimes_A \mathrm{Hom}_A(V, W) \to \mathrm{Hom}_A(V, M \otimes_A W)$$
$$(3.15) \qquad M \otimes_B \mathrm{Hom}_A(V, N) \to \mathrm{Hom}_A(V, M \otimes_B N)$$

は M, N, V, W について natural な $B\#U$-homomorphisms である。特別な場合として $A = k$ または $A = B$ の場合を以後良く断りなく使うので注意。

(3.7), (3.8), (3.9) の両辺の $H^0(U, ?)$ をとって, natural isomorphisms

$$(3.16) \qquad \Psi : \mathrm{Hom}_{B\#U}(V \otimes_A M, N) \cong \mathrm{Hom}_{A\#U}(V, \mathrm{Hom}_B(M, N))$$
$$(3.17) \qquad \Psi : \mathrm{Hom}_{B\#U}(M \otimes_A V, N) \cong \mathrm{Hom}_{B\#U}(M, \mathrm{Hom}_A(V, N))$$
$$(3.18) \qquad \Psi : \mathrm{Hom}_{A\#U}(M \otimes_B N, V) \cong \mathrm{Hom}_{B\#U}(M, \mathrm{Hom}_A(N, V))$$

を得る。よって, 次を得る。

補題 3.19 次が成立する。

1 N が $B\#U$-injective, M が A-flat ならば $\mathrm{Hom}_B(M, N)$ は $A\#U$-injective である。

2 N が $B\#U$-injective, V が A-flat ならば, $\mathrm{Hom}_A(V, N)$ は $B\#U$-injective である。

3 N が B-flat, V が $A\#U$-injective ならば, $\mathrm{Hom}_A(N, V)$ は $B\#U$-injective である。

4 M が B-projective, V が $A\#U$-projective ならば $V \otimes_A M$ は $B\#U$-projective である。

5 M が $B\#U$-projective, V が A-projective ならば, $M \otimes_A V$ は $B\#U$-projective である。

6 N が A-projective, M が $B\#U$-projective ならば, $M \otimes_B N$ は $A\#U$-projective である。

特に, V が $A\#U$-projecive module なら, $V \otimes_A B$ は $B\#U$-projective である。

また, $A\#U$-module として $B\#U \cong B \otimes_A (A\#U) \cong (A\#U) \otimes_A B$ であるから, 次を得る。

系 3.20 B が A-projective なら, $B\#U$-projective module は $A\#U$-projective である。特に, $A\#U$-projective module は U-projective である。

また, 補題 3.19 **1** で, $M = B$ の時を考えれば, 次が分かる。

系 3.21 B が A-flat なら, $B\#U$-injective module は $A\#U$-injective である。特に, $A\#U$-injective module は U-injective である。

4 Tor^A と Ext_A

依然, U は cocommutative Hopf algebra, $\varphi : A \to B$ は commutative な U-module algebras の間の U-module algebra map とする。

補題 4.1 $A\#U$-projective module は A-projective である。$A\#U$-injective module は A-injective である。

証明 前半。$A\#U$ が A-free なら良い。A の $A\#U$ への作用は $a(b \otimes u) = ab \otimes u$ で与えられるので, U の基底 X をとると, $\{1 \otimes x \,|\, x \in X\}$ が $A\#U$ の A-free basis であることは明白である。

後半。Cofree $A\#U$-module が A-cofree ならよいので, 右 $A\#U$-module $A\#U_{A\#U}$ が A-free なら良い (A は $A\#U$ の center に入っていないので, 前半と形式的には同じではない)。これをいうには, 積

$$U \otimes A \to A\#U = A \otimes U \quad (u \otimes a \mapsto (1 \otimes u)(a \otimes 1) = \sum_{(u)} u_{(1)}a \otimes u_{(2)})$$

が同型ならば良いが, 逆写像が $a \otimes u \mapsto \sum_{(u)} u_{(1)} \otimes (Su_{(2)})a$ で与えられる。 □

特に M, N を $A\#U$-modules とする時, $A\#U$-module

$$L_i(M \otimes_A ?)(N) \cong L_i(? \otimes_A N)(M) \qquad (\text{resp. } R^i \operatorname{Hom}_A(M, ?)(N) \cong R^i \operatorname{Hom}_A(?, N)(M))$$

は, 単に A-module としては $\mathrm{Tor}_i^A(M, N)$ (resp. $\mathrm{Ext}_A^i(M, N)$) であるので, これらの記号で, $A\#U$-module としての構造も持っているものを表す。

補題 3.19 と (3.7), (3.16) により, 次を得る。

命題 4.2 M, N が $B\#U$-module, M は A-flat, V は $A\#U$-module とする時, spectral sequences

$$(4.3) \qquad E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_A^p(V, \mathrm{Ext}_B^q(M, N)) \ \Rightarrow\ \mathrm{Ext}_B^{p+q}(V \otimes_A M, N) \quad (\text{in } {}_{B\#U}\mathbb{M})$$

$$(4.4) \qquad E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_{A\#U}^p(V, \mathrm{Ext}_B^q(M, N)) \ \Rightarrow\ \mathrm{Ext}_{B\#U}^{p+q}(V \otimes_A M, N) \quad (\text{in } {}_{H^0(U,B)}\mathbb{M})$$

が存在する。特に, さらに M が B-projective の時, 同型

$$(4.5) \qquad \mathrm{Ext}_A^i(V, \operatorname{Hom}_B(M, N)) \ \cong\ \mathrm{Ext}_B^i(V \otimes_A M, N) \quad (\text{in } {}_{B\#U}\mathbb{M})$$

$$(4.6) \qquad \mathrm{Ext}_{A\#U}^i(V, \operatorname{Hom}_B(M, N)) \ \cong\ \mathrm{Ext}_{B\#U}^i(V \otimes_A M, N) \quad (\text{in } {}_{H^0(U,B)}\mathbb{M})$$

を得る。

同様にして似たような spectral sequences がいくつか得られる。

5 可換代数へのアフィン代数群の作用

Affine algebraic k-group scheme G が affine k-scheme X に k 作用しているとする。これは, H, A をそれぞれ G, X の座標環とするとき, H は k 上有限生成で可換な k-Hopf algebra で, A は可換な H-comodule k-algebra であるといっても同じである。この時, G が A に (環準同型で) 作用するとか, A は G-algebra であるともいう。$f : A \to B$ が H-comodule algebra map の時, f が G-algebra map であるとか, B は (G, A)-algebra であるとかいう。

G-module とは, H-comodule のことに他ならない。そこで, (H, A)-Hopf module のことを (G, A)-module と呼ぶことにし, ${}_A\mathbb{M}^H$ の代わりに, ${}_{G,A}\mathbb{M}$ で表すことにする。$\mathbb{M}^H$ は ${}_G\mathbb{M}$ で表す。$\mathrm{Ext}^i_{{}_G\mathbb{M}}$, $H^i(\mathbb{M}^H, ?)$, $\mathrm{Ext}^i_{{}_{G,A}\mathbb{M}}$ はそれぞれ, Ext^i_G, $H^i(G, ?)$, $\mathrm{Ext}^i_{G,A}$ で表される。$H^0(G, ?)$ は $(?)^G$ とも表され, G-invariance と呼ばれる。(G, A)-module A の (G, A)-submodule は G-ideal と呼ばれる。I が A の G-ideal なら, A/I は自然に (G, A)-algebra である。

$U = H^\circ$ とおく。U は cocommutative である。したがって, $A\#U$ について, 前節までの結果が流用できる。補題 2.7 によって, 埋め込み $\Phi : {}_{G,A}\mathbb{M} \to {}_{A\#U}\mathbb{M}$ の right adjoint である rational part functor $(?)_{\mathrm{rat}} : {}_{A\#U}\mathbb{M} \to {}_{G,A}\mathbb{M}$ があることに注意する。(G, A)-module は rational $A\#U$-module と同一視される。

例 5.1 $n \geq 1$, $G = \mathbb{G}_m^n$ とおく。ここに $\mathbb{G}_m = GL_1(k)$ である。この時, $H = k[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]$, $\Delta_H(t_i) = t_i \otimes t_i$ となる。したがって, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ について, $t^\lambda = t_1^{\lambda_1} \cdots t_n^{\lambda_n}$ とおけば$\Delta_H(t^\lambda) = t^\lambda \otimes t^\lambda$ である。したがって, k-coalgebra として $H = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} k \cdot t^\lambda$ と直和分解している。このことから, G-module V はいつでも $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ と分解する。ここに, $V_\lambda = \{v \in V \mid \omega_V(v) = v \otimes t^\lambda\}$ である。V, W が G-modules で, $f : V \to W$ が k-linear map の時, f が G-homomorphism であることと, $f(V_\lambda) \subset W_\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{Z}^n)$ であることは同値で, G-module とは, $\mathbb{Z}^n$-graded vector space に他ならないことが分かる。したがって, G が作用する k-algebra A は, 単に $\mathbb{Z}^n$-graded k-algebra と同じで, (G, A)-module とは, graded A-module と同じである。

A-finite な (G, A)-modules のなす ${}_{G,A}\mathbb{M}$ の full subcategory を${}_{G,A}\mathbb{M}_f$ で表す。有限次元 G-modules のなす ${}_G\mathbb{M}$ の full subcategory ${}_{G,k}\mathbb{M}_f$ は${}_G\mathbb{M}_f$ とも表す。$A \otimes V$, $V \in {}_G\mathbb{M}$ (resp. $V \in {}_G\mathbb{M}_f$) の形の (G, A)-module を pure free module (resp. pure finite free module) という。

補題 5.2 $M \in {}_{G,A}\mathbb{M}$ とする。

1 ${}_{G,A}\mathbb{M}$ の全射 $F \to M$ で, F が pure free module なものが存在する。よって, M の (G, A)-resolution $\mathbb{F} \to M$ で, 各項が pure free なものがとれる。

2 さらに M が A-finite ならば, F は pure finite free module にとれる。よって, この時, A が noetherian ならば, M の (G, A)-resolution $\mathbb{F} \to M$ で, 各項が pure finite free module なものがとれる。

証明 **1** は, 単に A-action $F = A \otimes M \to M$ を考えれば良い。

2 を示す。M の生成元は有限個にとれるので, それら全部を含む M の有限次元 G-submodule M_0 が取れる。合成 $F = A \otimes M_0 \hookrightarrow A \otimes M \to M$ が条件を満たしている。 □

補題 5.3 M, N は rational $A\#U$-module とする。この時, 以下の $A\#U$-modules は rational となる。M の submodule 及び factor module, $\mathrm{Tor}_i^A(M, N)$. M が A 上有限生成で A が noetherian ならば $\mathrm{Ext}_A^i(M, N)$ も rational である (A の noether 性がなくても, $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ は rational)。V が rational U-module の時, $M \otimes V$ は rational. さらに V が有限次元なら $\mathrm{Hom}_k(V, N)$ も rational. Rational module の inductive limit は rational である。特に, A が noetherian で, I が A の G-ideal の時, local cohomology $H_I^i(M)$ も rational である。

証明 Non-trivial なのは Tor と Ext と $H_I^i(M)$ だけであろう。まず, rational $A\#U$-modules は subquotient で閉じているので, (G, A)-module の complex の (co-)homology も rational であることに注意する。

Tor は補題 5.2 **1** の resolution $\mathbb{F}$ が圏 ${}_{A\#U}\mathbb{M}$ で $? \otimes_A N$-acyclic な (G, A)-module resolution だから容易に従う。

Ext については, 補題 5.2 **2** の resolution が圏 ${}_{A\#U}\mathbb{M}$ で $\mathrm{Hom}_A(?, N)$-acyclic な, 各項 pure finite free な resolution だから, $i = 0$, $M = A \otimes V$ が pure finite free の場合に帰着され, $\mathrm{Hom}_A(A \otimes V, N) \cong \mathrm{Hom}_k(V, N)$ によって rational であることが分かる ($i = 0$ なら, A の noether 性は使っていない)。

$H_I^i(M) \cong \lim \mathrm{Ext}_A^i(A/I^n, M)$ は rational module の inductive limit だから, $H_I^i(M)$ も rational である。 □

$f : A \to B$ が可換な G-algebras の G-algebra map とする。${}_{G,A}\mathbb{M}$, ${}_{G,B}\mathbb{M}$ がそれぞれ ${}_{A\#U}\mathbb{M}$, ${}_{B\#U}\mathbb{M}$ の full-subcategory であることから, 次が得られる。

補題 5.4 $M, N \in {}_{G,B}\mathbb{M}$, $V \in {}_{G,A}\mathbb{M}$ である時, 次が成立する。

1 N が (G, B)-injective, M が B-finite で A-flat ならば $\mathrm{Hom}_B(M, N)$ は (G, A)-injective である。特に, B が A-flat ならば, (G, B)-injective module は (G, A)-injective module である。

2 N が (G, B)-injective, V が A-finite flat ならば, $\mathrm{Hom}_A(V, N)$ は (G, B)-injective である。

3 N が B-flat で A-finite, V が (G, A)-injective ならば, $\mathrm{Hom}_A(N, V)$ は (G, B)-injective である。

系 5.5 M, N が (G, B)-modules, V が (G, A)-module の時, 次が成立する。

1 M が B-finite projective で A-flat ならば,

$$\mathrm{Ext}^i_{G,B}(V \otimes_A M, N) \cong \mathrm{Ext}^i_{G,A}(V, \mathrm{Hom}_B(M, N)).$$

2 V が A-finite projective ならば,

$$\mathrm{Ext}^i_{G,B}(M \otimes_A V, N) \cong \mathrm{Ext}^i_{G,B}(M, \mathrm{Hom}_A(V,N)) \cong \mathrm{Ext}^i_{G,B}(M, N \otimes_A \mathrm{Hom}_A(V,A))$$

上の補題 **1** で, M の B-projective の仮定を除き, Spectral sequence を作ることも可能であるが, $\mathrm{Hom}_B(M, ?)$ の導来関手 $\mathrm{Ext}^i_{B,\mathrm{rat}}(M,?)$ は $i=0$ を除き, (少なくとも自明には) $\mathrm{Ext}^i_B(M,?)$ ではない。考えている圏が ${}_{G,B}\mathbb{M}$ であり, (G,B)-injective module が B-injective かどうかは不明だからである。無論, M が B-projective なら, $i>0$ で両者とも消えて違いは問題にならない。**2** についても同様の注意が必要である。

6 Graded algebra への作用

この節では, A が k 上有限生成である positively graded k-algebra を考える。このような次数付環は, 完備局所環と似た環論的取り扱いが可能であり, 多くの概念や結果が (graded version の名の下に) 移植され, 成果をあげている [18]. 可換環論についての説明のない用語や概念については, [7] 及びその references を参照して下さい。

$A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$ が $\mathbb{Z}$-graded とする。この時, G の A への作用を考えて次数づけがうまく意味を持つのは各 A_i が A の G-submodule になっている時であろう。この時, A が $\mathbb{Z}$-graded であることから A は $\mathbb{G}_m$ 作用を持つが, $\mathbb{G}_m$ の作用は G の作用と compatible なので, A は $\tilde{G} := \mathbb{G}_m \times G$ の作用を持つ。この時 inclusion $\mathbb{G}_m \hookrightarrow \tilde{G}$ は center に入っている。

そこで, 次の状況を考える方が都合が良い。G は固定された部分群 $\mathbb{G}_m \subset Z(G)$ を持つ。以後, この節の終りまで, この状況を考える。

G-module は $\mathbb{G}_m$-module でもあるから, 常に $\mathbb{Z}$-graded である。以後, この状況では, この次数づけを常に考える。さて, G が作用する可換 k-algebra A を考えると, A は graded k-algebra で, (G,A)-module は $(\mathbb{G}_m, A)$-module でもあるから, A-graded である。M が (G,A)-module で $M = \bigoplus_i M_i$ の時, $\mathbb{G}_m \subset Z(G)$ だから 各 M_i は M の G-submodule であることが容易に分かる。

以下, $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$ は G の作用する commutative k-algebra で, A は k 上次数が正の斉次元有限個で k-algebra として生成されているものとする。A は, G-algebra で次数正の変数による多項式環 S の, G-ideal I による quotient S/I として書ける。実際, A が l 次以下の元で生成されている時, $Q = A_1 \oplus \cdots \oplus A_l$ とおき, $S = \mathrm{Sym}\, Q$ とおけば良い。I は自然な map $S \to A$ の kernel である。

以後, このような S, I を固定し, $A = S/I$ とみなす。

命題 6.1 $M, N \in {}_{G,A}\mathbb{M}_f$ の時, $\dim_k \mathrm{Hom}_{G,A}(M,N) < \infty$ $(i \geq 0)$ である。

証明 ベクトル空間として有限次元であるということは submodule で閉じているので, 補題 5.2 によって, $M = A \otimes V$ は pure finite free module であるとして良い。$V = V_s \oplus \cdots \oplus V_t$ $(s \leq t)$ となる $s, t \in \mathbb{Z}$ が存在するので, この時,

$$\mathrm{Hom}_{G,A}(A \otimes V, N) \cong \mathrm{Hom}_G(V,N) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_m}(V,N) = \bigoplus_{i=s}^{t} \mathrm{Hom}_k(V_i, N_i)$$

である。各 V_i, N_i は有限次元だから, $\mathrm{Hom}_{G,A}(A\otimes V, N)$ も有限次元である。 □

系 6.2 $M\in {}_{G,A}\mathbb{M}_f$ ならば, $\mathrm{End}_{G,A}(M)$ は有限次元 k-algebra である。したがって, ${}_{G,A}\mathbb{M}_f$ は Krull-Schmidt である。

以下, $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_A=\bigoplus_{i>0}A_i$ とおく。$\mathfrak{m}$ は A の G-ideal である。

補題 6.3 M が (G,A)-module で, A-module として cyclic ならば, $\Lambda_M:=M/\mathfrak{m}M$ は G の 1 次元表現で, A のある G-ideal I が存在して $M\cong A/I\otimes\Lambda_M$ である。

証明 $M=\bigoplus_{i\geq s}M_s$, $M_s\neq 0$ とすると, $\Lambda_M\cong M_s$ は G の 1 次元表現である。後半をいうには, M を $M\otimes\Lambda_M^*$ で置き換えて, はじめから $\Lambda_M=k$ として良い。この時, $A\cong A\otimes M_s\hookrightarrow A\otimes M\to M$ の合成は (G,A)-epimorphism であり, kernel I は G-ideal である。 □

補題 6.4 $F\in {}_G\mathbb{M}_f$, F は A-free とする。$V:=F/\mathfrak{m}F=\bigoplus_{i=s}^t V_i$ (V_i は V の degree i component) とおく時, F は filtration

$$F=F^{[t]}\supset F^{[t-1]}\supset\cdots\supset F^{[s]}\supset F^{[s-1]}=0$$

で, $F^{[i]}/F^{[i-1]}\cong A\otimes V_i$ ($s\leq i\leq t$) となるようなものを unique に持つ。このような F の filtration を F の degree-pure free filtration (DPF filtration) と呼ぶ。

証明 単に $(\mathbb{G}_m,A)$-module としての条件だけでも, F^i は F の degree i 以下の part $\bigoplus_{j\leq i}F_j$ で生成された submodule となり unique である。一方, $\bigoplus_{j\leq i}F_j$ は F の G-submodule なので, 存在もいえた。 □

以下では, DPF module といえば, $A\otimes V$ で, V の degree が一箇所に concentrate されているものを指すことにする。

補題 6.5 (G,A)-module E で性質

1 A-module として, k の A-injective hull と同型

2 $\mathrm{Hom}_{G,A}(k,E)\cong k$

を満たすものが同型を除いて unique に存在する。さらに, E' が **1** を満たす時, $\Lambda=\mathrm{Hom}_A(k,E')$ は G の 1 次元表現であり, $E'\cong E\otimes\Lambda$ である。この補題の E を $E_A(k)$ で表す。関手 $\mathrm{Hom}_A(?,E)$ は $(?)^\star$ で示す。

証明 存在は $E=H^0_{\mathfrak{m}}(A^*)\cong\lim(A/\mathfrak{m}^n)^*$ とおけば良い。実際, A^* は A-injective だから, E は $\mathfrak{m}$ のみで support された A-injective module であり,

$$\mathrm{Hom}_A(k,E)=\lim\mathrm{Hom}_A(k,\mathrm{Hom}_k(A/\mathfrak{m}^n,k))=\lim\mathrm{Hom}_k(k\otimes_A A/\mathfrak{m}^n,k)=k$$

であるから, **1**, **2** を満たす。

次に, 最後の主張を示す。これを示せば, E' が **2** を満たす時には $\Lambda \cong k$ 故, $E' \cong E$ となって, E の一意性も従い, 補題は証明される。そのためには, E' を $E' \otimes \Lambda^*$ で置き換え, はじめから$\Lambda \cong k$ として良い。

$E'_n := [0 : \mathfrak{m}^n]_{E'} = \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}^n, E')$ とおく。A-artinian (G, A)-module に対して, $(?)^\star \cong (?)^*$ であることに注意する。順系 $\{E'_n\}$ に $(?)^\star$ を施して, 逆系 $\{(E'_n)^\star\}$ を得るが, Matlis duality によって, 各 $(E'_n)^\star$ は A-module としては $(A/\mathfrak{m}^n)^{\star\star} \cong A/\mathfrak{m}^n$ に同型。この逆系は補題 6.3 によって, A の quotient の逆系とみなせ, $\{A/\mathfrak{m}^n\}$ と (G, A)-module の逆系として同型。よって, $\{E'_n\}$ は順系として $\{(E'_n)^{\star\star}\} \cong \{(A/\mathfrak{m}^n)^\star\}$ と一致し, $E' \cong \lim E'_n \cong \lim (A/\mathfrak{m}^n)^\star \cong E$ である。 □

補題 6.6 Bounded な $A\#U$-complex R で, 次の条件を満たすものが, quasi-isomorphism を除いて一意的に存在する。

1 R は A-complex として dualizing である。

2 $H^0_{\mathfrak{m}}(R) \cong E_A(k)$ (左辺は hyper cohomology)

1 のみを満たすものは, degree shifting と, 1 次元表現のテンサーと quasi-isomorphism を除いて unique である。

証明 存在をまずいう。$A = S$ の時。S の $A\#U$-injective resolution I をとり, I を十分先で truncate すれば, S の $A\#U$-resolution で, bounded A-injective なものがとれるので, それを I' とおく。**1** は I' によって満たされている。補題 6.5 に注意すれば, degree shifting と 1 次元表現のテンサーによって **2** を満たすように取り替えられるので, これを $R = R_S$ とすれば良い。一般の時は, $R = R_A = \mathrm{Hom}_S(A, R_S)$ とおけば良い。

一意性と最後の主張を示すには, 最後の主張のみ示せば良い。R' が **1** を満たすとせよ。Duality map $R' \to \mathrm{Hom}^{\cdot}_A(\mathrm{Hom}^{\cdot}_A(R', R), R)$ は $A\#U$-complex の quasi-isomorphism である。補題 6.3 により, $\mathrm{Hom}^{\cdot}_A(R', R)$ は A を degree shift して, 1 次元表現をテンサーしたものと quasi-isomorphic で, R は A-injective complex 故, 求める結果を得る。 □

補題 6.6 の R を R_A で表し, G-normalized dualizing complex と呼ぶ。Duality map が $A\#U$-quasi isomorphism であったから, 次が従う。

補題 6.7 $M \in {}_{G,A}\mathbb{M}_f$ とする時, duality isomorphism

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong \mathrm{Ext}^{d-i}_A(M, R_A)^\star$$

は (G, A)-isomorphism である。

以下, A は d 次元, S は n 次元 (つまり Q が n 次元), とし, $h = n - d$ とおく。$H^{-d}(R_A)$ を K_A で表す。

補題 6.8 $K_S \cong S \otimes \bigwedge^n Q$ であり, $K_A \cong \mathrm{Ext}^h_S(A, K_S)$ である。

証明 $K_S \cong S \otimes \Lambda$, Λ は 1 次元表現と表される。$k \cong \mathrm{Ext}^n_S(k, K_S) \cong \mathrm{Ext}^n_S(k, S) \otimes \Lambda$ なので, $\mathrm{Ext}^n_S(k, S) \cong (\bigwedge^n Q)^*$ をいえば良いが, Koszul complex

$$0 \to S \otimes \textstyle\bigwedge^n Q \to \cdots \to S \otimes Q \to S \to k \to 0$$

は k の pure free resolution だから, これは明白である。

後半は, R_S が K_S の A-injective $S\#U$-resolution を左に n shift したものだから, 定義により明白である。 □

補題 6.9 A が Cohen-Macaulay であるとする。この時, (G, A)-module K が A-module としては K_A と同型ならば, $K \cong K_A \otimes \mathrm{Ext}^d_A(k, K)$ である。

証明 補題 6.3 によって,

$$K \cong \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(K, K_A), K_A) \cong \mathrm{Hom}_A(A \otimes \Lambda^*, K_A) \cong K_A \otimes \Lambda,$$

ここに Λ はある 1 次元表現である。$\mathrm{Ext}^d_A(k, K) \cong \mathrm{Ext}^d_A(k, K_A) \otimes \Lambda \cong \Lambda$ だから, 求める結果を得る。 □

7 Approximation からの準備

本節では, Auslander たちによる Approximation theory についての準備する。圏 $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ と関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ と $\mathcal{C}$ の full-subcategory $\mathcal{S}$ に対して, ある $S \in \mathcal{S}$ が存在して $F(S)$ と同型になるような $\mathcal{C}'$ の object 全体がなす full-subcategory を $F(\mathcal{S})$ で表す。

圏 $\mathcal{C}$ に対して, $\mathcal{C}$ の null object の一つも, null object の全体も 0 で表すが, 混乱はないだろう。

$\mathcal{A}$ は abelian category とする。この時, $\mathcal{A}$ の morphism $p : M \to N$ が right minimal であるとは, 任意の $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M)$ に対して, $p\varphi = p$ ならばφ が同型となることをいう。Left minimal は right minimal の dual notion である。つまり, $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ で考えて right minimal である $\mathcal{A}$ の morphism は left minimal であるという。$\mathcal{X}$ を $\mathcal{A}$ の full subcategory とする。$\mathcal{A}$ の morphism $f : X \to M$ が M の right $\mathcal{X}$-approximation であるとは, 任意の $X' \in \mathcal{X}$ と任意の $g \in \mathcal{A}(X', M)$ に対して, ある $h \in \mathcal{A}(X', X)$ が存在して $fh = g$ となることをいう。これは, $\mathcal{A}(?, f) : \mathcal{A}(?, X) \to \mathcal{A}(?, M)$ が $\mathcal{X}$ 上の functor の間の epimorphism であるといっても同じである。Left $\mathcal{X}$-approximation は dual の概念である。Right (resp. left) minimal な right (resp. left) $\mathcal{X}$-approximation は単に right (resp. left) minimal $\mathcal{X}$-approximation と呼ばれる。M の right minimal $\mathcal{X}$-approximation は, (存在すれば) $\mathcal{A}/M$ の object として同型を除いて unique である。

$\mathcal{A}$ が right (resp. left) (minimal) $\mathcal{X}$-approximation を持つとは, 任意の $M \in \mathcal{A}$ に対して, M が right (resp. left) (minimal) $\mathcal{X}$-approximation を持つことをいう。

(Minimal) approximation の存在については次が基本的といえる。Enough projectives でも enough injectives でもないかも知れない $\mathcal{A}$ の $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}$ については, [31] 参照。

補題 7.1

$$0 \to Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} M \to 0$$

が $\mathcal{A}$ の完全列で, $X \in \mathcal{X}$ で, $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, K) = 0$ であれば, p は M の right $\mathcal{X}$-approximation である。

証明 任意の $X' \in \mathcal{X}$ に対して,

$$\mathcal{A}(X', X) \to \mathcal{A}(X', M) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X, K) = 0$$

が完全だから, 主張は明らかである。 □

補題 7.2 $\mathcal{A}$ は abelian category, $p : M \to N$ は $\mathcal{A}$ の morphism とする。次の 2 条件を考える。

1 p は right minimal である。

2 $i : K \to M$ を f の kernel とする時, i を通して K と M は共通の直和因子を持たない。

この時, **1⇒2** である。また, $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M)$ が right artinian ならば **2⇒1** である。

証明 **1⇒2** は自明である。逆向きは, $E = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M)$ とおき, $\varphi \in E$ で $p\varphi = p$ となるものをとる時, E-module E_E と $\varphi \in E = \mathrm{End}_E(E_E)$ について, Fitting's lemma [34] を適用すれば, ある E の巾等元 e が存在して, $\varphi(eE) \subset eE$, $\varphi((1-e)E) \subset (1-e)E$ かつ, $\varphi|_{eE}$ は巾零, $\varphi|_{(1-e)E}$ は同型となる。$\varphi^n e = 0$ とする時, $p(eM) = (p\varphi^n)(eM) = 0$ だから, eM は i を通した K と M の共通の直和因子である。したがって, $e = 0$ となり, $\varphi \in E$ は invertible となる。 □

系 7.3 $\mathcal{X}$ が $\mathcal{A}$ の direct summand で閉じた full subcategory, $\mathcal{A}$ の object の endomorphism ring は right artinian とする。この時, $M \in \mathcal{A}$ が right (resp. left) $\mathcal{X}$-approximation を持てば, M は right (resp. left) minimal $\mathcal{X}$-approximation を unique に持つ。

証明 $\mathcal{A}$ が Krull-Schmidt であることから, 与えられた right $\mathcal{X}$-approximation

$$0 \to K \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} M$$

から出発して, i を通した K と X の共通の direct summand があれば取り除くことを有限回繰り返して, 補題の **2** の条件を満たすようにできるから, 補題によって存在がいえる。一意性は常に成り立っている。Left approximation についても同様である。 □

以下に述べる Auslander-Buchweiz [4] の理論は, Cohen-Macaulay approximation の構成を初めて与え, 後で述べる Δ-good approximation の構成にも役立った。$\mathcal{X}$ は $\mathcal{A}$ の full subcategory で $0 \in \mathcal{X}$ とする。$M \in \mathcal{A}$ に対して,

$$0 \to X_r \to \cdots \to X_1 \to X_0 \to M \to 0 \qquad (r \geq 0)$$

の形の完全列を長さ r の M の $\mathcal{X}$-resolution という。長さ有限の $\mathcal{X}$-resolution を持つ $\mathcal{A}$ の object の全体を $\hat{\mathcal{X}}$ で表す。$M \in \mathcal{A}$ に対して, $M \notin \hat{\mathcal{X}}$ の時, $\mathcal{X}$-resol.dim$(M) = \infty$ とし, $M \in \mathcal{X}$ の時は, 長さ r の M の $\mathcal{X}$-resolution が存在するような r の最小を $\mathcal{X}$-resol.dim(M) で表す。

$\omega \subset \mathcal{X}$ が $\mathcal{X}$ の cogenerator であるとは, 任意の $X \in \mathcal{X}$ に対して, 完全列

$$0 \to X \to T \to X' \to 0$$

であって, $T \in \omega$, $X' \in \mathcal{X}$ となるものが存在することをいう。Generator は cogenerator の dual な概念である。

次は Auslander-Buchweiz の一連の定理 [4] を本稿で必要な形にまとめたものである。

定理 7.4 (Auslander-Buchweiz) $\mathcal{A}$ が abelian category で仮定

AB1 $\mathcal{X}$ は extension と全射の kernel と直和因子で閉じた $\mathcal{A}$ の additive full-subcategory で $\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{A}$.

AB2 $\mathcal{Y}$ は単射の cokernel と extension と 直和因子で閉じた $\mathcal{A}$ の additive full-subcategory.

AB3 $\omega = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ とおく時, ω は $\mathcal{X}$ の cogenerator である。

AB4 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, \omega) = 0$ $(i > 0)$.

が満たされているとする。この時, 次が成立する。

1 $\hat{\omega} = \mathcal{Y}$

2 $\omega' \subset \omega$ で, ω' が $\mathcal{X}$ の 直和因子で閉じた cogenerator ならば, $\omega' = \omega$.

3 $M \in \mathcal{A}$ とする時, 次が成立する。

i ($\mathcal{X}$-approximation の存在) $\mathcal{A}$ の完全列

$$0 \to Y \to X \xrightarrow{p} M \to 0$$

で, $X \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{Y}$ となるものが存在する。

ii ($\mathcal{Y}$-hull の存在) $\mathcal{A}$ の完全列

$$0 \to M \xrightarrow{\iota} Y \to X \to 0$$

で, $X \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{Y}$ となるものが存在する。

4 $M \in \mathcal{A}$ の時, 次は同値である。

i $M \in \mathcal{X}$

ii $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, \mathcal{Y}) = 0$ $(i > 0)$

ii' $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M, \mathcal{Y}) = 0$.

iii $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, \omega) = 0$ $(i > 0)$

よって, **3, i** の完全列の p は M の right $\mathcal{X}$-approximation である。

5 $M \in \mathcal{A}$ の時, 次は同値である。

i $M \in \mathcal{Y}$ **ii** $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, M) = 0$ $(i > 0)$ **ii'** $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, M) = 0$

よって, **3, ii** の完全列の ι は M の left $\mathcal{Y}$-approximation である。

6 $M \in \mathcal{A}$ について,

$$\mathcal{X}\text{-resol.dim}(M) = \sup(\{i \mid \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, \mathcal{Y}) \neq 0\} \cup \{0\}) = \sup(\{i \mid \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, \omega) \neq 0\} \cup \{0\})$$

7 $Y \in \mathcal{Y}$ に対して, $\omega\text{-resol.dim}(Y) = \mathcal{X}\text{-resol.dim}(Y)$ である。

証明は ほとんど [4], [5] に出ている。**2 i** の完全列 ($\mathcal{X}$-approximation と呼ぶ) の minimality は, right $\mathcal{X}$-approximation p の minimality で定義する。**2 ii** の完全列 ($\mathcal{Y}$-hull と呼ぶ) の minimality は, left $\mathcal{Y}$-approximation ι の minimality で定義する。

定理の仮定 **AB1-AB4** が満たされる時, $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ は $\mathcal{A}$ の AB-context であるということにする。

8 Reductive 群の表現論からの準備

本節では reductive 群の表現について準備をする。代数群に関する定義のない用語等については, [24], [38], [25] を参照。本節の内容をほとんど含むものが [20] でもう少し詳しく survey されている。

G は k-split した reductive 群であるとする。G の k-split maximal torus T を固定し, T を含む k 上定義された G の Borel subgroup B を固定し, B を negative Borel とするように positive roots を定める。$X = X(T)$ は T の weight の全体, X^+ で G の dominant weight の全体を表す。$W = N_G(T)/T$ は G の Weyl 群, w_0 は W の最長元を表す。Weight λ を持つ B の 1 次元表現を k_λ で表す。$\lambda \in X^+$ に対して, heighest weight λ の induced module $\mathrm{ind}_B^G(k_\lambda)$ を $\nabla(\lambda)$ で, heighest weight λ の Weyl module (Verma module) $\nabla(-w_0\lambda)^*$ を $\Delta(\lambda)$ でそれぞれ表す。$\nabla(\lambda)$ の socle と $\Delta(\lambda)$ の top は同型で, これらを $L(\lambda)$ で表す時, $\{L(\lambda) \mid \lambda \in X^+\}$ が G の既約表現の同型類の全体である。

$\mathcal{A}$ を abelian category, $\mathcal{X}$ を $\mathcal{A}$ の (small とは限らない) subset とする。$M \in \mathcal{A}$ が $\mathcal{X}$-filtration を持つとは, M の filtration

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_r = 0$$

が存在して, 各 $i = 1, \ldots, r$ に対してある $X_i \in \mathcal{X}$ が存在して $M_{i-1}/M_i \cong X_i$ となることをいう。$\mathcal{X}$-filtration を持つ $\mathcal{A}$ の object 全体を $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ で表す。明らかに, $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ は 0 を含み, extension で閉じている。$\mathcal{F}(\mathcal{X})$ の object が単射でなす filtered inductive system の inductive limit で書ける $\mathcal{A}$ の object 全体を $\mathcal{F}^*(\mathcal{X})$ で表す。

$\Delta = \Delta_G := \{\Delta(\lambda) \mid \lambda \in X^+\}$, $\nabla = \nabla_G := \{\nabla(\lambda) \mid \lambda \in X^+\}$ とそれぞれおく。$M \in {}_G\mathbb{M}$ が $\mathcal{F}(\Delta)$ (resp $\mathcal{F}(\nabla)$, $\mathcal{F}^*(\nabla)$) に属する時 Δ-good (resp. ∇-good, good) であるという。$\omega_G := \mathcal{F}(\Delta) \cap \mathcal{F}(\nabla)$ とおく。ω_G の object を tilting G-module という。

Good modules に関する良く知られている事実を列挙しよう。

定理 8.1 次が成立する。

1 G の座標環 H は good であり, 全ての $\lambda \in X^+$ に対して

$$\dim_k \Delta(\lambda) = \dim_k \nabla(\lambda) = \mathrm{Hom}_G(\Delta(\lambda), H) < \infty$$

である。

2 $V \in {}_G\mathbb{M}_f$ に対して, $V \in \mathcal{F}(\Delta) \iff V^* \in \mathcal{F}(\nabla)$.

3 $V \in {}_G\mathbb{M}$ に対して, 次は同値である。

1. V は good
2. $\mathrm{res}^G_{[G,G]}(V)$ は good $[G,G]$-module, ここに, $[G,G]$ は G の derived subgroup.
3. 任意の $\lambda \in X^+$ に対して, $\mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\lambda), V) = 0$
4. 任意の $X \in \mathcal{F}(\Delta)$ に対して, $\mathrm{Ext}^i_G(X, V) = 0$ $(i > 0)$

4 G の 1 次元表現は tilting である。

5 $V \in {}_G\mathbb{M}$ の時, $V \in \mathcal{F}(\nabla) \iff V \in \mathcal{F}^*(\nabla)$ かつ $\dim_k V < \infty$ である。$\mathcal{F}(\nabla)$ 及び $\mathcal{F}^*(\nabla)$ は, 直和因子と extension と単射の cokernel で閉じている。

6 $V, W \in \mathcal{F}(\Delta)$ (resp. $\mathcal{F}(\nabla)$, $\mathcal{F}^*(\nabla)$) の時, $V \otimes W \in \mathcal{F}(\Delta)$ (resp. $\mathcal{F}(\nabla)$, $\mathcal{F}^*(\nabla)$) である。

7 $(\mathcal{F}(\Delta), \mathcal{F}(\nabla))$ は ${}_G\mathbb{M}_f$ の AB-context である。

我々の good module の定義は, S. Donkin によるもの (N 型の inductive limit になるものは module with good filtrations と呼ばれる, [11], [12] を参照) より多少広くなっているが, 本質的には同じである。参考文献は, **1** については, [25, p.251], [27] を参照。**2** は自明な事実である。**3** については, [12, p.36], [25, p.239], [17] を参照。我々の定義と同値なものは, [17] で扱われている。V が good であって k 上 (高々) 可算次元であることと S. Donkin の意味で good filtration を持つことは同値である。**4** は k が tilting であることと, 1 次元表現の dual は 1 次元であることと, 1 次元表現の $[G,G]$ への制限は trivial であることから従う。**5** は自明である。**6** については [32] を参照。**7** は, **1-5** などの結果を modulo にすれば, C. M. Ringel の quasi-hereditary algebra に関する approximation の定理 [35] である。Quasi-hereditary algebra と reductive 群の結びつきについては [13], [20] を参照。

${}_G\mathbb{M}_f$ の object の endomorphism ring は k 上有限次元だから, ${}_G\mathbb{M}_f$ は right minimal $\mathcal{F}(\Delta)$-approximation と left minimal $\mathcal{F}(\nabla)$-approximation を持つ。$\mathcal{F}(\Delta)$-approximation を Δ-good approximation, $\mathcal{F}(\nabla)$-hull を ∇-good hull という。

次の定理も Ringel による。

定理 8.2 $\lambda \in X^+$ と $M \in {}_G\mathbb{M}_f$ に関して, 次は同値である。

1 Right minimal $\mathcal{F}(\Delta)$-approximation $M \to \nabla(\lambda)$ が存在する。

2 Left minimal $\mathcal{F}(\nabla)$-approximation $\Delta(\lambda) \to M$ が存在する。

3 M は tilting, indecomposable で, heighest weight λ を持つ。

上記の同値な条件を満たす M (同型を除き unique である) を S. Donkin [15] に従って, partial tilting module of heighest weight λ と呼んで, $T(\lambda)$ で表すことにする。

定理 8.3 (Ringel) 任意の G の tilting module は (色々な) $T(\lambda)$ の有限直和である。

補題 8.4 $V, W \in {}_G\mathbb{M}_f$ に対して, ある ${}_G\mathbb{M}_f$ の全射 $P \to V$ が存在して, $P \in \mathcal{F}(\Delta)$ かつ $\mathrm{Ext}^i_G(P, W) = 0$ $(i > 0)$ である。

証明 $M \in {}_G\mathbb{M}_f$ とする時, $V \oplus W$ が属するような dominant weights の saturated subset π が存在する。Schur algebra $S(\pi)$ 上での V の projective cover $P \to V$ をとれば, $P \in \mathcal{F}(\Delta)$ であり,

$$\mathrm{Ext}^i_G(P, W) \cong \mathrm{Ext}^i_{S(\pi)}(P, W) = 0 \quad (i > 0)$$

である ([13], [20] 参照)。 □

9 Reductive 群の作用を持つ Cohen-Macaulay approximation

本節では, 6 節での記号と状況を引続き考える。$\mathbb{G}_m \subset Z(G) \subset G$, $A = S/I$ は以前の通りとする。さらに, 本節では G は reductive と仮定する。

補題 9.1 $M, N \in {}_{G,A}\mathbb{M}_f$ の時, ある $X \in A \otimes \mathcal{F}(\Delta_G)$ と全射 $X \to M$ が存在して, $\mathrm{Ext}^i_{G,A}(X, N) = 0$ $(i > 0)$ である。

証明 $M = A \otimes V$ は DPF として良い。$V = V_s \oplus \cdots \oplus V_t$ $(s \le t)$ とする時, $W = N_s \oplus \cdots \oplus N_t$ は有限次元である。補題 8.4 によって, ある全射 $P \to V$ が存在して, $P \in \mathcal{F}(\Delta_G)$ で, $\mathrm{Ext}^i_G(P, W) = 0$ $(i > 0)$ である。P を $P_s \oplus \cdots \oplus P_t$ で取り替え, はじめから $P = P_s \oplus \cdots \oplus P_t$ にとることが出来る。この時, $\mathrm{Ext}^i_G(P, N_j) = 0$ $(i > 0,\ j \notin [s, t])$ である。一方, $\mathrm{Ext}^i_G(P, W) = 0$ $(i > 0)$ だから, $\mathrm{Ext}^i_G(P, N) = 0$ $(i > 0)$ である。したがって,

$$\mathrm{Ext}^i_{G,A}(A \otimes P, N) \cong \mathrm{Ext}^i_G(P, \mathrm{Hom}_A(A, N)) = 0 \quad (i > 0)$$

である。$A \otimes P \to A \otimes V = M$ は全射ゆえ, $X = A \otimes P$ とおけば良い。 □

系 9.2 $M, N \in {}_{G,A}\mathbb{M}_f$ とすると, $\mathrm{Ext}^i_{G,A}(M, N)$ は有限次元である。

証明 補題 9.1 によって, M は resolution $\mathbb{F}$ で, $\mathbb{F}$ の各項 F_i について $\mathrm{Ext}^j_{G,A}(F_i, N) = 0$ $(j > 0)$, $F_i \in A \otimes \mathcal{F}(\Delta)$ となるものを持つ。N の (G, A)-injective resolution を $\mathbb{I}$ とする時,

$$\mathrm{Ext}^i_{G,A}(M, N) \cong H^i(\mathrm{Hom}_{G,A}(M, \mathbb{I})) \cong H^i(\mathrm{Hom}_{G,A}(\mathbb{F}, \mathbb{I})) \cong H^i(\mathrm{Hom}_{G,A}(\mathbb{F}, N))$$

であり, $H^i(\mathrm{Hom}_{G,A}(\mathbb{F}, N))$ は $\mathrm{Hom}_{G,A}(F_i, N)$ の subquotient であるから補題 6.1 によって, $\mathrm{Ext}^i_{G,A}(M, N)$ は有限次元である。 □

次も成立しているが, 証明が長くなるので, statement のみを掲げる。

定理 9.3 $M, N \in {}_{G,A}\mathbb{M}_f$ の時, 自然な射 $\mathrm{Ext}^i_{{}_{G,A}\mathbb{M}_f}(M, N) \to \mathrm{Ext}^i_{G,A}(M, N)$ は $i \geq 0$ について同型である。

${}_{G,A}\mathbb{M}_f$ は enough projectives にも enough injectives にもならないかも知れない (筆者は知らない)。上の定理も G が reductive 群で A が positively graded という特殊な状況を full に使った証明しか知らない。$A = k$ の場合ですら, 一般にどうなっているのか筆者は知らない。

以下ではさらに, A は Cohen-Macaulay と仮定する。

A-finite な (G, A)-module で, G-module として good なものの全体を $\mathcal{G}$ で表す。A-module として maximal Cohen-Macaulay module であるような (G, A)-module の全体を $\mathcal{M}$ で表す。

定義 9.4 $M \in {}_{G,A}\mathbb{M}_f$ が Check-good Maximal Cohen-Macaulay module (CGMCM) であるとは, M が Maximal Cohen-Macaulay A-module で, canonical dual $\mathrm{Hom}_A(M, K_A)$ が (G-module として) good であることをいう。また, $N \in {}_{G,A}\mathbb{M}_f$ が Tilt-good module of finite injective dimension (TGMFID) であるとは, N が A-module として of finite injective dimension であって, $\mathrm{Hom}_A(K_A, N)$ が good であることをいう。

CGMCM の全体を $\mathcal{X} = \mathcal{X}(G, A)$ で表す。また, TGMFID の全体を $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(G, A)$ で表す。$\widehat{\mathcal{X}(G, A)}$ は $\hat{\mathcal{X}}(G, A)$ で表す。

次が本論での, 主定理である。

定理 9.5 S, A 及び K_A が good ならば, $(\mathcal{X}(G, A), \mathcal{Y}(G, A))$ は ${}_{G,A}\mathbb{M}_f$ の AB context である。

注意 9.6 $G = \mathbb{G}_m$ の場合には, 任意の G-module が good なので, G に関する条件は無条件でとなる。定理 7.4 の結論も込みにして, この場合は Cohen-Macaulay approximation [4] と Sharp's theorem [37] として知られている (以下の証明でも自由に用いる)。一方, $S = A = k$ の時には, 定理は前節で触れた G-module についてのものとなり, いずれも良く知られているものとなる。

注意 9.7 系 6.2 により, 定理 9.5 が正しくなれば, $M \in {}_{G,A}\mathbb{M}_f$ は minimal $\mathcal{X}$-approximation と minimal $\mathcal{Y}$-hull を持つ。

以下, S, A と K_A は good であるとして, **AB1-4** の条件を確かめてゆく。まず, $\mathcal{X}$ は全射の kernel, extension, direct summand で, $\mathcal{Y}$ は単射の cokernel, extension, direct summand で明らかに閉じていることに注意する (check せよ)。特に, **AB2** は明らかである。また, G の 1 次元表現は good だから, $K_S = S \otimes \bigwedge^n Q$ も good である。

補題 9.8 $F \in {}_{G,A}\mathbb{M}_f$ で F は A-free とする。この時,

1 F が good $\iff$ $F/\mathfrak{m}F$ が ∇-good $\iff$ $F \in \mathcal{F}(A \otimes \nabla_G)$

2 $\mathrm{Hom}_A(F, A)$ が good $\iff$ $F/\mathfrak{m}F$ が Δ-good $\iff$ $F \in \mathcal{F}(A \otimes \Delta_G)$.

証明 $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ が A-finite free な (G, A)-modules の完全列なら, これに $A/\mathfrak{m}$ をテンサーしても完全ゆえ, 補題を DPF filtration (補題 6.4) の長さに関する induction で示すことにすれば, 初めから $F = A \otimes V$ $(V = F/\mathfrak{m}F)$ は DPF であるとして良い。この時, $\mathrm{Hom}_A(A \otimes V, A) \cong A \otimes V^*$ だから, **2** は **1** に帰着される。

1 の左側の同値を示す。$\Leftarrow$ は good modules が tensor product で閉じているから明白で, $\Rightarrow$ は $V = k \otimes V$ は $A \otimes V$ の G-module としての直和因子であり, やはり OK である。右側の同値も DPF case に帰着すれば明白である。 □

A-module として finite free であるような (G, A)-modules の全体 $\mathcal{F}(A \otimes {}_G\mathbb{M}_f)$ を Fr で表す。A-module として of finite projective (resp. injective) dimension であるもののなす ${}_{G,A}\mathbb{M}_f$ の full subcategory を $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) とおく。

補題 9.9 $? \otimes_A K_A : \mathcal{P} \to \mathcal{I}$ は完全圏の同値で, $\mathrm{Hom}_A(K_A, ?)$ は quasi-inverse である。

証明 $G = \mathbb{G}_m$ の case は Sharp's theorem [37] として知られているものの graded version である。この対応が G についてうまくいっていることはそれほど難しくない。 □

同様にして, 次も確かめられる。

補題 9.10 $\mathcal{M}$ の上で, $\mathrm{Hom}_A(?, K_A)$ は完全列を保ち, $\mathrm{Hom}_A(?, K_A) \circ \mathrm{Hom}_A(?, K_A) \cong \mathrm{Id}$ である。 □

以上により, 次の **1,2** が分かる。また, 次の **3,4,5,6** も容易である。

補題 9.11 次が成立する。

1 M が good な MCM $\iff$ $\mathrm{Hom}_A(M, K_A) \in \mathcal{X}$

2 N が good で $\mathrm{proj.\,dim}_A N < \infty \iff N \otimes_A K_A \in \mathcal{Y}$

3 $V \in {}_G\mathbb{M}_f$ が Δ-good, $X \in \mathcal{X}$ ならば $X \otimes V \in \mathcal{X}$.

4 $W \in {}_G\mathbb{M}_f$ が ∇-good, $Y \in \mathcal{Y}$ ならば $Y \otimes W \in \mathcal{Y}$.

5 $K_A \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$

6 $A \in \mathcal{X}$

□

以下, $\omega = \omega(G,A) = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ とおく。

命題 9.12 $\omega = K_A \otimes \omega_G$ である。つまり, $M \in {}_G\mathbb{M}_f$ について,

$$M \in \omega \iff \text{ある tilting } G\text{-module } T \text{ があって}, \ M \cong K_A \otimes T.$$

証明 $\Leftarrow$ は, 補題 9.11 の **3,4,5** によって明白である。

$\Rightarrow$ を示す。$F = \mathrm{Hom}_A(K_A, M)$ とおくと, good で A-finite free で $M = F \otimes_A K_A$. $N = \mathrm{Hom}_A(M, K_A)$ とおくと, これも good で A-finite free.

$$N = \mathrm{Hom}_A(F \otimes_A K_A, K_A) \cong \mathrm{Hom}_A(F, \mathrm{Hom}_A(K_A, K_A)) \cong \mathrm{Hom}_A(F, A).$$

よって, 補題 9.8 によって, $T = F/\mathfrak{m}F$ は tilting である。$T = \bigoplus_i T_i$ と次数にしたがって分解しておく。この時, F の DPF filtration $\{F^{[i]}\}$ に対して, $F^{[i]}/F^{[i-1]} \cong A \otimes T_i$ となり, 各 T_i は tilting である。

i, j を任意に与えた時,

$$\mathrm{Ext}^1_{G,A}(A \otimes T_i, A \otimes T_j) \cong \mathrm{Ext}^1_G(T_i, A \otimes T_j) = 0$$

だから,

$$F \cong \bigoplus_i F^{[i]}/F^{[i-1]} \cong \bigoplus_i A \otimes T_i \cong A \otimes T.$$

従って, $M \cong F \otimes_A K_A \cong K_A \otimes T$ である。 □

系 9.13 集合

$$\Gamma := \{K_A \otimes T(\lambda) \mid \lambda \in X^+\}$$

は ω の indecomposable object の同型類の全体である。ここに, X^+ は G の dominant weight の全体である (前節参照)。

証明 各 $\lambda \in X^+$ に対し,

$$A/\mathfrak{m} \otimes_A \mathrm{Hom}_A(K_A, K_A \otimes T(\lambda)) \cong A/\mathfrak{m} \otimes_A (A \otimes T(\lambda)) \cong T(\lambda)$$

が互いに非同型な indecomposable G-module だから, 各 $K_A \otimes T(\lambda)$ は互いに非同型な indecomposable (G,A)-modules である。補題 6.2 に注意すると, 命題により, $\mathrm{add}(\Gamma) = \omega$ だから求める結果を得る。 □

補題 9.14 $X \in \mathcal{X}$ で, $T \in {}_G\mathbb{M}_f$ が ∇-good ならば, $\mathrm{Ext}^i_{G,A}(X, K_A \otimes T) = 0$ $(i > 0)$. 特に, **AB4** が成立する。

証明　i に関する帰納法を用いる。$i=1$ の場合を示す。$\mathrm{Ext}^1_{G,A}(A\otimes T^*, \mathrm{Hom}_A(X,K_A)) = \mathrm{Ext}^1_G(T^*, \mathrm{Hom}_A(X,K_A))$ で, T^* は Δ-good, $\mathrm{Hom}_A(X,K_A)$ は good 故, これは消える。したがって, ${}_{G,A}\mathbb{M}$ の任意の完全列

$$0 \to K_A \otimes T \to W \to X \to 0$$

は補題 9.10 から canonical dual をとれば明らかなように split する。これは, $\mathrm{Ext}^1_{G,A}(X, K_A\otimes T) = 0$ を示している。

次に $i \geq 2$ とする。完全列

$$0 \to X' \to A\otimes V \to X \to 0$$

で, V は Δ-good で $\mathrm{Ext}^j_{G,A}(A\otimes V, K_A\otimes T) = 0$ $(j\geq 1)$ となるものが補題 9.1 によって存在する。補題 9.11 の **3,6** により, $A\otimes V \in \mathcal{X}$ であり, $\mathcal{X}$ は全射の kernel で閉じているから, $X' \in \mathcal{X}$ である。$\mathrm{Ext}^i_{G,A}(X, K_A\otimes T) \cong \mathrm{Ext}^{i-1}_{G,A}(X', K_A\otimes T) = 0$ を得る。 □

補題 9.15 $\mathcal{A}$ が abelian category,

$$\alpha : 0 \to M_0 \to M_1 \to M_2 \to 0,$$
$$\beta_0 : 0 \to Y_0 \to X_0 \to M_0 \to 0,$$
$$\beta_2 : 0 \to Y_2 \to X_2 \to M_2 \to 0$$

がそれぞれ $\mathcal{A}$ の完全列で, $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(X_2, Y_0) = 0$ の時, 行, 列ともに exact な可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Y_0 & \to & Y_1 & \to & Y_2 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & X_0 & \to & X_1 & \to & X_2 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & M_0 & \to & M_1 & \to & M_2 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

で左から 1 列目, 3 列目がそれぞれ β_0, β_2 で, 上から 3 列目が α であるようなものが存在する。また, $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X_2, Y_0) = 0$ ならば, このような図式は図式の同型を除いて一意的である。

証明　容易である。

補題 9.16 $F \in {}_G\mathbb{M}_f$ が A-finite free の時, A-finite free な (G,A)-modules の exact sequence

$$0 \to Y \to X \to F \to 0 \tag{9.17}$$

であって,

$$0 \to Y/\mathfrak{m}Y \to X/\mathfrak{m}X \to F/\mathfrak{m}F \to 0$$

が $F/\mathfrak{m}F$ の right minimal Δ-good approximation であるようなものが複体の同型を除いて unique に存在する。

証明　$r = \operatorname{rank}_A F$ についての induction. $r = 0$ の時は自明なので, $r > 0$ として良い。この時, $F = \bigoplus_{i \geq s} F_i$, $V := F_s \neq 0$ とするときに

$$\alpha : 0 \to A \otimes V \to F \to F' \to 0$$

は (G, A)-modules で A-finite free なものの exact sequence である。ここに, $F' = F^{[s+1]}$ である。Induction の仮定により,

$$\beta_2 : 0 \to Y' \to X' \to F' \to 0$$

で補題の条件を満たすものがある。

また, V の minimal Δ-good approximation を

$$\gamma : 0 \to V_Y \to V_X \to V \to 0$$

とする。V が degree s であるので, V_X, V_Y も degree s である。$\beta_0 := A \otimes \gamma$ とおくと, 補題 9.15 の仮定が満たされている。実際, $\operatorname{Ext}^i_{G,A}(X', A \otimes V_Y) = 0$ $(i > 0)$ がいえれば良いが, そのためには, X' は DPF で $A \otimes W$, W は Δ-good の形であるとして良く, この場合は明白である。

従って, (G, A)-module で A-finite free なものの可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A \otimes V_Y & \to & Y & \to & Y' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A \otimes V_X & \to & X & \to & X' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A \otimes V & \to & F & \to & F' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

で行と列が完全なものが一意的に存在する。この図式に $A/\mathfrak{m} \otimes_A ?$ を作用させて, 容易に

$$0 \to Y/\mathfrak{m}Y \to X/\mathfrak{m}X \to F/\mathfrak{m}F \to 0$$

が $X/\mathfrak{m}X$ の minimal Δ-good approximation であることを知る。これで存在はいえた。

一意性も DPF の場合は V が degree s の時, V_Y も degree s なので,

$$\operatorname{Ext}^1_{G,A}(A \otimes V, A \otimes V_Y) \cong \operatorname{Ext}^1_G(V, A \otimes V_Y) \cong \operatorname{Ext}^1_G(V, V_Y)$$

がいえて分かり, 一般の場合は条件を満たす完全列 (9.17) に対して, 完全列

$$0 \to (?)^{[s]} \to \operatorname{Id} \to \operatorname{Id}/(?)^{[s]} \to 0$$

をなす関手を apply して, 上記の図式と同型な図式を得る。　□

さて, ここから, 残っている **AB1**, **AB3** の証明に入る。

補題 9.1 により, $A \otimes \mathcal{F}(\Delta_G)$ は${}_{G,A}\mathbb{M}_f$ の generator であり, 補題 9.11 の **3,6** によって $A \otimes \mathcal{F}(\Delta_G) \subset \mathcal{X}$ である。よって, $M \in {}_{G,A}\mathbb{M}_f$ に対して, 完全列

$$0 \to N \to A \otimes V_s \to \cdots \to A \otimes V_0 \to M \to 0$$

各 V_i は Δ-good, したがって $A \otimes V_i \in \mathcal{X}$ であるものがとれる。$M \in \hat{\mathcal{X}}$ をいうには, $N \in \hat{\mathcal{X}}$ をいえば良く, s を十分大きくとることにより, **AB1** を証明するには, $\mathcal{M} \subset \hat{\mathcal{X}}$ がいえれば良いことが分かる。きちんと補題の形で掲げよう。

補題 9.18 $\mathcal{M} \subset \hat{\mathcal{X}}$ ならば, ${}_{G,A}\mathbb{M}_f = \hat{\mathcal{X}}$ であり, **AB1** は正しい。

G-module V に対して, $H^i_\Delta(V) := \bigoplus_{\lambda \in X^+} \mathrm{Ext}^i_G(\Delta(\lambda), V)$ とおく。$H^i_\Delta(?)$ は δ-functor で, $H^i_\Delta(V) = 0$ $(i > 0)$ と V が good であることは同値である。

まず, 定理 9.5 を $A = S$ の時に示す。

命題 9.19 次が成立する。

1 ${}_{G,S}\mathbb{M}_f = \hat{\mathcal{X}}(G,S)$ である。したがって **AB1** が成立する。

2 $\omega(G,S)$ は $\mathcal{X}(G,S)$ の cogenerator である。したがって, 定理 9.5 は $A = S$ に対して正しい。

3 $M \in {}_{G,A}\mathbb{M}_f$ ならば, ある $s \geq 0$ が存在して, $i > s$ ならば $H^i_\Delta(M) = 0$.

証明　**3** を一般の A について示すには, $M \in {}_{G,A}\mathbb{M}_f \subset {}_{G,S}\mathbb{M}_f$ であり, 言いたい結論は G-module としての性質のみであるから, $A = S$ として良い。したがって, 以下, この証明では (G,S)-module のみを考える。

まず **1** を示す。今の場合, $\mathcal{M} = \mathrm{Fr}$ 故, $F \in \mathrm{Fr}$ として, $F \in \hat{\mathcal{X}}$ をいえば良い。

$$r = \mathcal{F}(\Delta)\text{-resol.dim}(F/\mathfrak{m}F) = \sup(\{i \mid H^i_\Delta((F/\mathfrak{m}F)^*) \neq 0\} \cup \{0\})$$

とおき, r についての induction で $F \in \hat{\mathcal{X}}$ を示す。$r = 0$ ならば, 補題 9.8 によって, $M \in \mathcal{F}(S \otimes \Delta_G)$ であるから, 主張は明白である。次に, $r > 0$ とすると, 完全列

$$0 \to \Omega \to S \otimes V \to F \to 0$$

で $V \in \mathcal{F}(\Delta)$ であるものがとれるが,

$$0 \to \Omega/\mathfrak{m}\Omega \to V \to F/\mathfrak{m}F \to 0$$

が完全で, $V \in \mathcal{F}(\Delta)$ なので, $\mathcal{F}(\Delta)\text{-resol.dim}(\Omega/\mathfrak{m}\Omega) = r - 1$ であり, induction の仮定から $\Omega \in \hat{\mathcal{X}}$ となる。したがって, $F \in \hat{\mathcal{X}}$ である。以上により, $A = S$ の時の **1** は証明された。

次に **2** を示す。今の場合, $A = S$ を考えているので, $\mathcal{M} = \mathrm{Fr}$ であり, $K_S \cong S \otimes \bigwedge^n Q$ で, $\bigwedge^n Q$ は 1 次元表現ゆえ, $\mathcal{X}(G,S) = \mathcal{F}(S \otimes \Delta_G)$ で, $\omega(G,S) = S \otimes \omega_G$ である (ちなみ

に $\mathcal{Y}(G,S)=\mathcal{G}$)。さて, $F\in\mathcal{X}(G,S)$ に対して, $\mathrm{Hom}_S(F,S)$ に補題 9.16 を適用して Fr の完全列

$$0\to Y\to X\to \mathrm{Hom}_S(F,S)\to 0$$

を作ると, Y は good, $\mathrm{Hom}_S(X,S)$ は good と出来る。したがって,

$$0\to F\to \mathrm{Hom}_S(X,S)\to \mathrm{Hom}_S(Y,S)\to 0$$

は完全で, $\mathrm{Hom}_S(Y,S)\in\mathcal{X}$ となり, $F\in\mathcal{X}$ 故, $\mathrm{Hom}_S(X,S)\in\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}=\omega$ となって, ω が $\mathcal{X}$ の cogenerator であることが確かめられた。

以上により, **1,2** が確かめられた。特に, 定理 9.5 が $A=S$ について正しくなった。

3 を示す。$A=S$ だから, $M\in\mathcal{P}=\mathcal{F}(\widehat{S\otimes\Delta_G})$ であり, はじめから $M\in\mathcal{F}(S\otimes\Delta_G)$ としても良い。$\mathrm{Hom}_S(M,S)$ の $\mathcal{F}(S\otimes\Delta_G)$-resolution で長さ有限のもの $\mathbb{F}$ をとれば, $M\cong \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_S(M,S),S)\to\mathrm{Hom}_S(\mathbb{F},S)$ は 補題 9.8 から, M の長さ有限の $\mathcal{G}$-coresolution である。したがってはじめから $M\in\mathcal{G}$ として良く, この時は明白である。 □

系 **9.20** 次が成立する。

1 $M\in{}_{G,S}\mathbb{M}_f$ で $r\geq 0$ とする時, 次は同値である。

i $M\in\mathcal{Y}(G,S)$ で $r\geq \mathrm{proj.\,dim}_S\,M$

ii 完全列

$$0\to Y_r\to Y_{r-1}\to\cdots\to Y_0\to M\to 0$$

であって, $Y_i\in\mathrm{Fr}\cap\mathcal{Y}(G,S)$ $(0\leq i\leq r)$ となるものが存在する。

ii 完全列

$$0\to Y\to T_{r-1}\to\cdots\to T_0\to M\to 0$$

であって, $Y\in\mathrm{Fr}\cap\mathcal{Y}(G,S)$, $T_i\in\omega(G,S)$ $(0\leq i<r)$ となるものが存在する。

2 $M\in{}_{G,A}\mathbb{M}_f$ について次は同値である。

i $M\in\mathcal{X}(G,A)$

ii $\mathcal{X}(G,S)$-resol.dim$(M)=h(=\dim S-\dim A)$.

3 $M\in{}_{G,A}\mathbb{M}_f$ について次は同値である。

i $M\in\mathcal{X}(G,A)$ かつ M は good

i' $M\in\mathcal{X}(G,A)$ かつ $\mathrm{Hom}_A(M,K_A)\in\mathcal{X}(G,A)$

ii 完全列

$$0\to T_h\to T_{h-1}\to\cdots\to T_0\to M\to 0$$

であって, $T_i\in\omega(G,S)$ $(0\leq i\leq h)$ となるものが存在する。

証明　まず **1** を調べる。**ii⇒i** は, $\hat{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}$ と depth lemma によって明白である。**i⇒iii** は, $s = \text{proj. dim}_S M$ についての帰納法。$s = 0$ なら明白で, $s > 0$ なら,

$$0 \to M' \to T_0 \to M \to 0$$

を M の $\mathcal{X}(G,S)$-approximation とする時, $M' \in \mathcal{Y}(G,S)$ だから, $T_0 \in \omega(G,S)$ となり, M' に induction の仮定を適用して結果を得る。**iii⇒ii** は自明である。

次に, **2** を示す。**i⇒ii** をいう。$M \in \mathcal{X}(G,A)$ とする。$\text{Hom}_A(M, K_A)$ は good なので, $\mathcal{Y}(G,S)$ に属し, $\text{proj. dim}_S M = h$ である。**1** の結果により, $\text{Hom}_A(M, K_A)$ は長さ h の $\text{Fr}_S \cap \mathcal{Y}(G,S)$-resolution $\mathbb{F}$ を持つ。すると $\text{Hom}_S(\mathbb{F}, K_S)$ は長さ h の

$$M \cong \text{Hom}_A(\text{Hom}_A(M, K_A), K_A) \cong \text{Ext}_S^h(\text{Hom}_A(M, K_A), K_S)$$

の $\mathcal{X}(G,S)$-resolution である。**ii⇒i** をいう。$M \in {}_{G,A}\mathbb{M}_f$ で $\mathcal{X}(G,S)$-resol.dim$(M) = h$ とする。M は長さ h の $\mathcal{X}(G,S)$-resolution $\mathbb{F}$ を持つ。まず,

$$\dim S - \operatorname{depth} M = \text{proj. dim}_S M \le h = \dim S - \dim A$$

だから, $\operatorname{depth} M \ge \dim A$ であり, 不等式は等式で $M \in \mathcal{M}_A$ である。次に, $\text{Hom}_S(\mathbb{F}, K_S)$ は $\text{Ext}_S^h(M, K_S) \cong \text{Hom}_A(M, K_A)$ の good free module resolution であるから, $\text{Hom}_A(M, K_A)$ も good となり, $M \in \mathcal{X}(G,A)$ が分かった。

次に **3** を示す。**i** $\iff$ **i'** は $\mathcal{X}(G,A)$ の定義から明白である。**ii⇒i'** は **2** から容易である。**i⇒ii** は, 上記 **2** と定理 7.4 の **7** から明白である。 □

命題 9.21 次が成立する。

1 ${}_{G,A}\mathbb{M}_f = \hat{\mathcal{X}}(G,A)$ である。したがって **AB1** が一般の A に対して成立する。

2 $\omega(G,A)$ は $\mathcal{X}(G,A)$ の cogenerator である。したがって, 定理 9.5 は一般の A に対して正しい。

証明　まず **1** の証明を行なう。

$M \in \mathcal{M}$ について $M \in \hat{\mathcal{X}}$ をいえば良い。$N = \text{Hom}_A(M, K_A)$ とおくと, 命題 9.19 の **3** により, ある $s \ge 0$ で $H^i_\Delta(N) = 0$ $(i > s)$ となる s が存在する。$\mathcal{M}$ の完全列

$$0 \to X \to A \otimes V_s \to \cdots \to A \otimes V_0 \to M \to 0$$

で, 各 V_i が Δ-good なものをとる。この時,

$$0 \to N \to K_A \otimes V_0^* \to \cdots \to K_A \otimes V_s^* \to \text{Hom}_A(X, K_A) \to 0$$

は完全であり, $H^i_\Delta(K_A \otimes V_j^*) = 0$ $(i > 0, j = 0, \ldots, s)$ であるから, 容易に,

$$H^i_\Delta(\text{Hom}_A(X, K_A)) = 0 \qquad (i > 0)$$

を知る。したがって, $X\in\mathcal{X}$ であり, $M\in\hat{\mathcal{X}}$ がいえた。

次に, **2** を示す。まず, $A\in {}_{G,A}\mathbb{M}_f$ に対して系 9.20 の **3** を適用して, 完全列

$$0\to T_h\to T_{h-1}\to\cdots\to T_1\xrightarrow{\partial} T_0\to A\to 0$$

であって, $T_i\in\omega(G,S)$ $(0\le i\le h)$ となるものが存在する。$J:=\operatorname{Im}\partial$ とおくと, J は good であることに注意する。したがって, $\operatorname{Ext}^1_{G,S}(S,J)\cong H^1(G,J)=0$ となり, 可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & I & \to & S & \to & A & \to & 0 \\ & & \downarrow_{j'} & & \downarrow_{j} & & \downarrow_{=} & & \\ 0 & \to & J & \to & T_0 & \to & A & \to & 0 \end{array}$$

を得る。$\operatorname{Im} j\not\subset \mathfrak{m}T_0$ で T_0 は S-free だから, j は S-split する単射であり, $Y':=\operatorname{Coker} j\cong\operatorname{Coker} j'$ は good である。したがって j' も単射になることに注意する。

$M\in\mathcal{X}$ に対して, $N=\operatorname{Hom}_A(M,K_A)$ とおく。さて, N を (G,S)-module とみなすと, 既に正しくなった S についての定理 9.5 により, N は $\mathcal{X}(G,S)$-approximation

$$0\to Y\to X\to N\to 0$$

を持つ。ここに X は free で, $X/\mathfrak{m}_SX$ は Δ-good である。一方, Y,N は good 故, X も good である。よって $X\in\omega(G,S)$ であり, $X\cong S\otimes V$, V は tilting と表される。可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & I\otimes V & \to & S\otimes V & \to & A\otimes V & \to & 0 \\ & & \downarrow_{i} & & \downarrow_{\cong} & & \downarrow_{p} & & \\ 0 & \to & Y & \to & X & \to & N & \to & 0 \end{array}$$

が得られる。Snake lemma から, p は全射, i は単射で, $Z:=\operatorname{Ker} p\cong\operatorname{Coker} i$ である。Z が good であることを示す。Push-out によって得られる図式

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \to & I\otimes V & \xrightarrow{i} & Y & \to & Z & \to & 0 \\ & & \downarrow_{j'\otimes 1_V} & & \downarrow & & \downarrow_{=} & & \\ 0 & \to & J\otimes V & \to & Y'' & \to & Z & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & Y'\otimes V & \xrightarrow{=} & Y'\otimes V & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & 0 & & & & \end{array}$$

を考えると, Y', V は good なので, $Y'\otimes V$ は good であり, Y も good だから Y'' も good である。$J\otimes V$ と Y'' が good だから, Z も good となる。

Maximal Cohen-Macaulay (G,A)-modules の完全列

$$0\to Z\to A\otimes V\to N\to 0$$

の canonical dual をとって, 完全列

$$0 \to M \to K_A \otimes V^* \to \mathrm{Hom}_A(Z, K_A) \to 0$$

を得る。$K_A \otimes V^* \in \omega$, $\mathrm{Hom}_A(Z, K_A) \in \mathcal{X}$ だから, ω は $\mathcal{X}$ の cogenerator である。 □

これで定理 9.5 は一般に証明された。

注意 9.22 さて, good で positively graded な Cohen-Macaulay G-algebra A が与えられ, K_A も good とする時に, good な S がとれて $A = S/I$ と書けるか, という問題が残る。6 節での構成法から, Q が good な時に, $\mathrm{Sym}\, Q$ が good というようなことがいえていれば, S として $\mathrm{Sym}\, Q$ が採用できて話しはうまくゆくのだが, そうはなっていない。実際, W が k-vector space で, $G = GL(W)$ で反例がある。W の次元が 6 以上で k の標数が 2 だと, $V = S_3W$ について S_2V は good ではない [6, Remark 4.2]. 但し, $V = \bigwedge^2 W$ [28], [6], $V = S_2W$ [29], [6], $V = W \otimes W$ [3] については $\mathrm{Sym}\, V$ は good であるが, これらはむしろ例外的に良い場合なのかも知れない。

尚, [2] には, $\bigwedge^2 \bigwedge^2 W$ は k の標数が 2 で $\dim_k W \geq 4$ ならば, ∇-good でも Δ-good でもないことが証明されている。

10 Determinantal ring の example

Determinantal ideal が前節の定理の条件を満たす non-trivial な例となっている。Non-trivial とは, G が linearly reductive ではなく, S/I は Gorenstein ではない, くらいの意味である。

k は体, $V = k^m$, $W = k^n$ は k 上のそれぞれ m 次元, n 次元のベクトル空間 $(m, n \geq 1)$ とし, $S = \mathrm{Sym}(V \otimes W)$ とする。$G = GL(V) \times GL(W)$ は Kronecker's product で $V \otimes W$ に作用し, S は G-algebra である。

V, W の基底 $\{x_1, \ldots, x_m\}$ 及び $\{y_1, \ldots, y_n\}$ をそれぞれとり, $x_{ij} = x_i \otimes y_j \in V \otimes W$ とおくと, S は x_{ij} を変数とする多項式環 $k[x_{ij}]$ である。与えられた t $(1 \leq t \leq \min(m, n))$ に対し, $I = I_t$ を, S 係数の行列 (x_{ij}) の全ての t-minors で生成される S の ideal と定義する。この時, G, S, 及び $A = S/I$ は定理の仮定を満たす。次数づけに関わる $\mathbb{G}_m \subset Z(G)$ は, $Z(GL(V)) \times e$ にとれば良い。実際, これによる次数づけは, 各変数の degree を 1 にしたものである。

A の Cohen-Macaulay 性は [23] ではじめて示された。S 及び I が good であることは, [3] が表現論的考察も実質上しており, 分かりやすい。無論, good であることは単射の cokernel で閉じているから $A = S/I$ も good になる。

K_A が good であることが一番難しい。これを定理として掲げる。

定理 10.1 上記の仮定のもとで, K_A は good である。

証明は割愛する。

尚, $m=n$ と A が Gorenstein であることは同値であり [39], G が linearly reductive であることと, $m=n=1$ または $\mathrm{char}(k)=0$ とは同値なので, 一般には A は non-Gorenstein で G は linearly reductive ではない。

参考文献

[1] E. Abe, "Hopf Algebra," Cambridge tracts in math. **74**, Cambridge (1977).

[2] K. Akin and D. A. Buchsbaum, Characteristic-free representation theory of the general linear group, *Adv. Math.* **58** (1985), 149–200.

[3] K. Akin, D. A. Buchsbaum and J. Weyman, Schur functors and Schur complexes, *Adv. in Math.* **44** (1982), 207-278.

[4] M. Auslander and R. O. Buchweitz, The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations, Soc. Math. de France, Mem **38** (1989), 5-37.

[5] M. Auslander and I. Reiten, Applications of contravariantly finite subcategories, *Adv. Math.* **86** (1991), 111–152.

[6] G. Boffi, On some plethysms, *Adv. in Math.* **89** (1991), 107–126.

[7] W. Bruns and J. Herzog, "Cohen-Macaulay rings," Cambridge (1993).

[8] D. A. Buchsbaum, A new construction of the Eagon-Northcott complex, *Adv. Math.* **34** (1979), 58–76.

[9] E. Cline, B. Parshall and L. Scott, Algebraic stratification in representation categories, *J. Alg.* **117** (1988), 504–521.

[10] 土井幸雄, ホップ代数２５年,「第１３回可換環論シンポジウム (1991 年, 富山県大山町) 報告集」(1992).

[11] S. Donkin, A filtration for rational modules, *Math. Z.* **177** (1981), 1–8.

[12] S. Donkin, "Rational representations of algebraic groups," *Lect. Notes Math.* **1140**, Springer Verlag (1985).

[13] S. Donkin, On Schur algebras and related algebras, I, *J. Alg.* **104** (1986), 310–328.

[14] S. Donkin, Skew modules for reductive groups, *J. Alg.* **113** (1988), 465–479.

[15] S. Donkin, On tilting modules for algebraic groups, *Math. Z.* **212** (1993), 39–60.

[16] J. A. Eagon and D. G. Northcott, Ideals defined by matrices and a certain complex associated with them, *Proc. Roy. Soc. London* Ser. A **269** (1962), 188-204.

[17] E. Friedlander, A canonical filtration for certain rational modules, *Math. Z.* **188** (1985), 433–438.

[18] S. Goto and K.-i. Watanabe, On graded rings, I, *J. Math. Soc. Japan,* **30** (1978), 179–213.

[19] S. Goto and K.-i. Watanabe, On graded rings, II ($\mathbb{Z}^n$-graded rings), *Tokyo J. Math.* **1** (1978), 237–261.

[20] 橋本光靖, q-Schur algebra の tilting module, 数理研講究録 **934**「トーリック多様体の幾何と凸多面体」(1996), 190–211.

[21] M. Hashimoto and K. Kurano, Resolutions of determinantal ideals,「1989 代数幾何学シンポジューム記録」(1990), 116–133.

[22] 日比孝之,「可換代数と組合せ論」, Springer (1995).

[23] M. Hochster and J. A. Eagon, Cohen-Macaulay rings, invariant theory, and the generic perfections of determinantal loci, *Amer. J. Math.* **93** (1971), 1020-1059.

[24] J. E. Humphreys, "Linear Algebraic Groups," GTM **21**, Springer (1975).

[25] J. C. Jantzen, "Representations of algebraic groups," Academic Press (1987).

[26] C. Kassel, "Introduction to Quantum Groups," GTM **155**, Springer (1995).

[27] M. Koppinen, Good bimodule filtrations for coordinate rings, *J. London Math. Soc.* **30** (1984), 244–250.

[28] K. Kurano, Relations on Pfaffians I: plethysm formulas, *J. Math. Kyoto Univ.* **31** (1991), 713–731.

[29] K. Kurano, On relations on minors of generic symmetric matrices, *J. Alg.* **124** (1989), 388–413.

[30] A. Lascoux, Syzygies des varietiés déterminantales, *Adv. in Math.* **30** (1978), 202-237.

[31] S. Mac Lane, "Homology," Springer (1963).

[32] O. Mathieu, Filtrations of G-modules, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* (4) **23** (1990), 625–644.

[33] S. Montgomery, "Hopf algebras and their actions on rings," *CBMS Reg. Conf. Ser. in Math.* **82**, AMS (1993).

[34] R. S. Pierce, "Associative Algebras," GTM**88**, Springer (1982).

[35] C. M. Ringel, The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences, *Math. Z.* **208** (1991), 209–223.

[36] L. L. Scott, Simulating algebraic geometry with algebra I: The algebraic theory of derived categories, *Proc. Symp. Pure Math.* **47** (1987), 271–281.

[37] R. Y. Sharp, Finitely generated modules of finite injective dimension over certain Cohen-Macaulay rings, *Proc. London Math. Soc.* (3) **25** (1972), 303–328.

[38] T. A. Springer, Linear Algebraic Groups, in A. N. Parshin and I. R. Shafarevich (Eds.), "Algebraic Geometry IV," EMS **55**, Springer (1994).

[39] T. Svanes, Coherent cohomology of Schubert subschemes of flag schemes and applications, *Adv. in Math.* **14** (1974), 369-453.

[40] M. E. Sweedler, "Hopf Algebras," Benjamin (1969).

[41] Y. Yoshino, "Cohen-Macaulay Modules over Cohen-Macaulay Rings," LMS **146**, Cambridge (1990).

[42] 吉野雄二, Cohen-Macaulay Approximation, 「第4回多元環の表現論シンポジウム報告集」 (1993), 119–138.